کنترل بهینه

جلسه هشتم   ۹۹/۷/۲۱

$$
(1)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}
$$

$$
J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(s), u(s), s)\, ds
$$

$$
J^*(y,t) = \min_{\substack{u \in U_{ad} \\ x(t)=y}} \left\{ h(x(t_f), t_f) + \int_{t}^{t_f} g(x(s), u(s), s)\, ds \right\}
$$

x جواب (1) در بازه (t, t_f)

همیلتونین $\quad \mathcal{H}(x,u,p,t) = g(x,u,t) + p \cdot f(x,u,t)$

$$
(\mathrm{HJB})\quad \begin{cases} -\partial_t J^*(x,t) = \min\limits_{u \in U_{ad}} \mathcal{H}(x, u, \nabla_x J^*(x,t), t) \\ J^*(y, t_f) = h(y, t_f) \end{cases}
$$

گزاره: اگر V در معادله (HJB) صدق کند و $u^* = \mu^*(x,t)$ می‌نیمم هامیلتونی را در هر نقطه (x,t) بدهد،

به علاوه اگر x^* جواب (1) برای $u = u^*$ باشد، آنگاه

$$V(y,t) = J^*(y,t) \qquad \forall y,t$$

و u^* کنترل بهینه مسأله است.

اثبات -

$$-\partial_t V = H(x, \mu^*(x,t), \nabla_x V^*, t) \tag{2}$$

$$= g(x,\mu^*,t) + \nabla_x V^* \cdot f(x,\mu^*,t)$$

در معادله بالا قرار دهید $x = x^*(t)$، آنگاه

$$0 = \underbrace{\partial_t V(x^*(t),t) + \nabla_x V(x^*(t),t)\cdot \dot{x}^*(t)}_{\frac{d}{dt} V(x^*(t),t)} + g(x^*(t),\mu^*,t)$$

$$0 = \underbrace{V(x^*(t_f), t_f)}_{h(x^*(t_f), t_f)} - V(x^*(t), t) + \int_t^{t_f} g(x^*(s), \mu^*, s)\, ds$$

$$V(x^*(t), t) = h(x^*(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x^*(s), \mu^*, s)\, dx$$

$$\geq J^*(x^*(t), t)$$

$$\Rightarrow \quad V(x_0, 0) \geq J^*(x_0, 0)$$

برای رابطه برعکس، $\hat{u}(t)$ را یک کنترل دلخواه بگیرید و جواب متناظر آن را $\hat{x}(t)$ قرار دهید.

از معادله (HJB) نتیجه می‌گردد که

$$-\partial_t V = \min_u H(x, u, \nabla_x V, t)$$

$$\leq H(x, \hat{u}, \nabla_x V, t)$$

در این رابطه قرار دهید $x = \hat{x}(t)$

$$0 \le \frac{d}{dt} V(\hat{x}(t), t) + g(\hat{x}(t), \hat{u}, t)$$

$$V(x_0, 0) \le h(\hat{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(\hat{x}(s), \hat{u}, s)\, ds$$

نامساوی بالا برای هر $\hat{u} \in U_{ad}$ دلخواه برقرار است. اگر از سمت راست مینیمم بگیریم نتیجه خواهد شد:

$$V(x_0, 0) \le J^*(x_0, 0)$$

در نتیجه $V(x_0, 0) = J^*(x_0, 0)$. به طور مشابه برای هر زمان نیز به دست می‌آید.

مثال-

$$J = \frac{1}{2}|x(T)|^2 \quad , |u| \le 1 \quad , \dot{x} = u(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$H(x,u,p,t) = p \cdot u$$

$$\min_{|u|\le 1} H = p \cdot \left(-\frac{p}{|p|}\right) = -|p|$$

$$(HJB) \begin{cases} -\partial_t J^* = -|\nabla_x J^*| \\ J^*(x,T) = \frac{1}{2}|x|^2 \end{cases}$$

مثال-

$$x \in \mathbb{R}^n , u \in \mathbb{R}^m \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$J = \frac{1}{2} x(t_f)^T H x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x(t)^T R(t) x(t) + u^T(t) Q(t) u(t)\, dt$$

$H, R \ge 0$ و $Q > 0$ متقارن هستند.

$$\mathcal{H}(x,u,p,t) = \frac{1}{2}(x^T R x + u^T Q u) + p \cdot (Ax + Bu)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Qu + B^T p \Rightarrow u = -Q^{-1} B^T p$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = Q > 0 \rightsquigarrow$$ نقطه مینیمم است

$$\begin{cases} -\partial_t J^* = \mathcal{H}(x, -Q^{-1} B^T \nabla_x J^*, \nabla_x J^*, t) \\ \quad = \frac{1}{2} x^T R x - \frac{1}{2} (\nabla_x J^*)^T B Q^{-1} B^T \nabla_x J^* + (\nabla_x J^*)^T A x \\ J^*(x, t_f) = \frac{1}{2} x^T H x \end{cases}$$

یک حدس معقول برای جواب

$$J^*(x,t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x \quad , \quad P(t_f) = H$$

$$-\frac{1}{2} x^T \dot{P} x = \frac{1}{2} x^T R x - \frac{1}{2} x^T P^T B Q^{-1} B^T P x + x^T P^T A x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\dot{P} = R - P^T B Q^{-1} B^T P + 2P^T A \\ P(t_f) = H \end{cases}$$

یک ODE از بعد $\frac{n^2+n}{2}$ است.

روش حساب تغییرات

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$\min \leftarrow J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(s), u(s), s)\, ds$$

$$V = C^1[a,b] = \{ x : [a,b] \to \mathbb{R}^n : \text{مشتق‌پذیر است } x \}$$

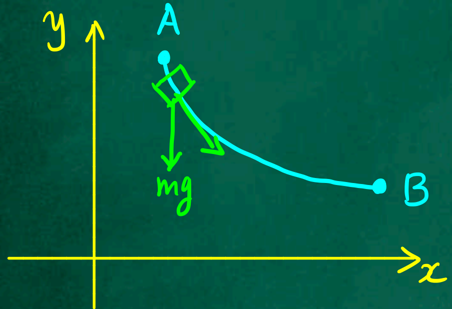
$$G(x, u) = \dot{x} - f(x, u, t) = 0$$ $\rightarrow$ این تساوی در V نوشته شده است.

$$J(x, u) : V \times U_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$$

در واقع مسأله به

$$\min_{\substack{x\in V\\ u\in U_{ad}}} J(x,u)$$

Subject to $G(x,u)=0$



مثال - قرار است مسیر حرکتی را طراحی کنیم از نقطه A به نقطه B

که اگر جسمی در نقطه A با سرعت اولیه v_A رها شود، تنها با نیروی

وزن خود در کوتاه‌ترین زمان به نقطه B برسد. (فرض کنید اصطکاک نداریم)

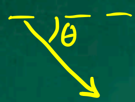
$$\frac{1}{2}m\left(v(t)^2 - v_A^2\right) + mg\left(y(t)-y_A\right) = 0$$

که سرعت مماسی

$$v(t) = \sqrt{v_A^2 - 2g\left(y(t)-y_A\right)} = \left|(\dot x, \dot y)\right|$$

$$\int_{y_A}^{y_B} dt = \int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{\dot y(t)}$$

$\dot y$ = مؤلفه عمودی سرعت است



$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= v \sin\theta \\ \tan\theta &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{y} = v\left(1+\cot^2\theta\right)^{-1/2}$$

$$= v\left(1+\frac{\dot{x}^2}{\dot{y}^2}\right)^{-1/2}$$

اگر منحنی واصل بینِ A و B را به عنوان نمودار تابعِ $x(y)$ تلقّی کنیم

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \Rightarrow \dot{y} = v\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$\text{زمان} = \int_{y_B}^{y_A} \frac{\left(1+(x')^2\right)^{1/2} dy}{\sqrt{v_A^2 - 2g(y-y_A)}} = J[x]$$

$$x : [y_B, y_A] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x(y_B) = x_B \,,\quad x(y_A) = x_A$$

مسأله تغییراتی بدون قید

$$J[x] = \int_a^b \ell(t, x, \dot{x})\,dt + \varphi(x(a), x(b))$$

$$V = C^1[a,b]$$

$$\min_{x \in V} J[x]$$

شرط لازم مرتبه اول: اگر x^* جواب مسأله بهینه‌سازی بالا باشد، آنگاه $\delta J(x^*, y) = 0$ برای هر $y \in V$

تعریف- تابع $J: V \to \mathbb{R}$ در نقطه x^* مشتق‌پذیر به معنای گاتو است، هرگاه عملگر خطی $A: V \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{J(x^* + \theta y) - J(x^*)}{\theta} = Ay$$

Ay مشتق صحیح J در نقطه x^* و در راستای y است که با $\delta J(x^*, y) = Ay$ نشان

می‌دهیم.

مثال - $J(x) = \int_0^1 |x(t)|^2 \, dt$

$$\frac{J(x+\theta y) - J(x)}{\theta} = \int_0^1 \frac{|x(t)+\theta y(t)|^2 - |x(t)|^2}{\theta}$$

$$= \int_0^1 \theta |y|^2 + 2\, x \cdot y \, dt \longrightarrow 2\int_0^1 x(t) \cdot y(t) \, dt$$

$$\delta J(x;y) = 2\int_0^1 x(t) \cdot y(t) \, dt$$

$$J(x) = \int_a^b \ell(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$ - مثل

$$\frac{J(x+\theta y) - J(x)}{\theta} = \int_a^b \frac{\ell(t, x+\theta y, \dot{x}+\theta \dot{y}) - \ell(t, x, \dot{x})}{\theta}\, dt$$

$$= \int_a^b \nabla_x \ell(t, x, \dot{x}) \cdot y + \nabla_{\dot{x}} \ell(t, x, \dot{x}) \cdot \dot{y}\; dt$$

$$= \delta J(x; y)$$

$$J = \varphi(x(a), x(b))$$ - مثل

$$\delta J(x; y) = \frac{d}{d\theta} J(x+\theta y)\Big|_{\theta=0} = \nabla_1 \varphi(x(a), x(b)) \cdot y(a) + \nabla_2 \varphi(x(a), x(b)) \cdot y(b)$$

شرط لازم اول بهینگی: اگر

$$J(x) = \int_a^b l(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

$$V = \{ x \in C^1[a,b] : x(a) = x_1 ,\ x(b) = x_2 \}$$

و اگر

$$J(x^*) = \min_{x \in V} J(x)$$

آنگاه

$$J(x^*) \le J(x^* + \theta y) \quad \forall \theta$$

$$\forall \quad y(a) = y(b) = 0$$

y با شرایط بالا تضمین می‌کند که $x^* + \theta y \in V$ یعنی y یک جهت شدنی برای نقطه x^* است.

از نامساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$0 \le \frac{J(x^* + \theta y) - J(x^*)}{|\theta|} \longrightarrow \pm \delta J(x^*; y) \quad \Rightarrow \quad \delta J(x^*; y) = 0$$

در نتیجه باید:

$$0 = \delta J(x^*; y) = \int_a^b \nabla_x \ell(t, x^*, \dot{x}^*) \cdot y + \nabla_{\dot{x}} \ell(t, x^*, \dot{x}^*) \cdot \dot{y} \, dt$$

$$= \int_a^b \left[\nabla_x \ell(t, x^*, \dot{x}^*) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} \ell(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right] y(t) \, dt$$

چون تساوی بالا برای هر y است پس باید

معادله اویلر-لاگرانژ $\leftarrow$ $$\nabla_x \ell(t, x^*, \dot{x}^*) = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} \ell(t, x^*, \dot{x}^*)$$

مثال- $J = \int_0^T |\dot{x}|^2 \, dt$ ، $x(0) = 0 , x(T) = A$. $\ell(t, x, p) = |p|^2$

معادله اویلر لاگرانژ تساوی عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0 \rightsquigarrow \ddot{x} = 0 \rightsquigarrow x(t) = \frac{A}{T} t$$

مثال - (مسیر حرکت مینیمال)

$$J(x) = \int_{y_B}^{y_A} \frac{\left(1+(x')^2\right)^{1/2}\, dy}{\sqrt{v_A^2 - 2g\,(y-y_A)}}$$

$$x(y_A) = x_A \,, \quad x(y_B) = y_B$$

$$\ell(y, x, p) = \frac{(1+p^2)^{1/2}}{\sqrt{U_A^2 - 2g\,(y-y_A)}}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{\dot{x}\,\left(1+(\dot{x})^2\right)^{-1/2}}{\sqrt{U_A^2 - 2g\,(y-y_A)}} \right] = 0$$