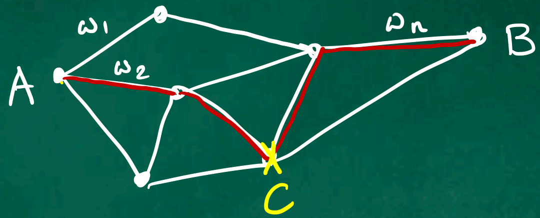
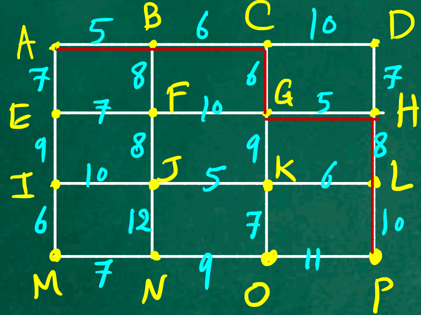
# کنترل بهینه

جلسه پنجم ۹۹/۷/۱۴

## برنامه‌ریزی پویا



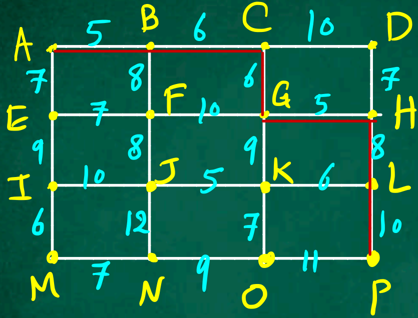




$$J^*_{AG} = \text{مینیمم هزینه همه مسیرها بین رأس A و G}$$

$$J_{ABFG} = J_{AB} + J_{BF} + J_{FG}$$

$$J^*_{AP} = \min_{\substack{\text{همه مسیرهای} \\ \text{A تا G}}} \left\{ J_{A \to G} + J^*_{GP} \right\}$$

$$= \min_{\text{رأس X}} \left\{ J_{A \to X} + J^*_{XP} \right\}$$




الگوریتم پیدا کردن مسیر بهینه :

۱- در نقاط همسایگی P مسیر بهینه را پیدا می‌کنیم.

$$J^*_{LP} = 10 \,, \quad J^*_{OP} = 11$$

۲- مسیرهای بهینه از رئوس همسایه به طول ۲ نقاط انتهایی P به آن را پیدا می‌کنیم.

$$J^*_{HP} = \min\left\{ \underbrace{\min\{J_{H\to L}\}}_{8} + \underbrace{J^*_{LP}}_{10} \,,\ \underbrace{\min\{J_{H\to O}\}}_{24} + \underbrace{J^*_{OP}}_{11} \right\}$$

$$= 18$$

$J^*_{KP} = ?$ $\qquad$ $J^*_{NP} = ?$

مثال -

$$\frac{dx}{dt} = a x(t) + b u(t)$$

$a, b, \lambda, T$ مشخص است

$$-1 \le u(t) \le 1$$

$$0 \le x(t) \le 1.5$$

$$J = x^2(T) + \lambda \int_0^T u^2(t)\, dt$$

$$\frac{dx}{dt}(k\Delta t) \simeq \frac{x((k+1)\Delta t) - x(k\Delta t)}{\Delta t} = a x(k\Delta t) + b u(k\Delta t)$$

$$x_k = x(k\Delta t), \quad u_k = u(k\Delta t)$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1 + a\Delta t) x_k + b \Delta t\, u_k, & N\Delta t = T \\ J = x_N^2 + \lambda \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \end{cases}$$

$$x_k \in \{0, 0.5, 1, 1.5\}$$

$$u_k \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$$

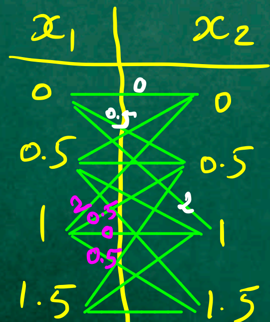
$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

برای سادگی $T=2$ , $\lambda=2$ ، $\Delta t=1$ ، $a=0, b=1$

| $x_2$ حالت | $J_2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.25 |
| 1 | 1 |
| 1.5 | 2.25 |

$$J = x_2^2 + 2(u_0^2 + u_1^2)$$

$J_2^*$ کمترین هزینه از بین حالت‌های مختلف نقطه انتهایی $= 0$




$$J_1^*(i) = \min_j \{ J_{12}^{ij} + J_2^*(j) \}$$

هزینه گذر از حالت i به j $= 2u_1^2$

که $u_1$ کنترلی است که حالت i را به j تبدیل می‌کند.

$$J_1^*(0) = \min\{0+0,\ 0.75,\ 3\} = 0$$

مسیر بهینه از حالت 0 به نقطه انتهایی کنترل $u_2 = 0$

به طوری که مسیر بهینه از حالت 1 به نقطه انتهایی با کنترل $u_2 = -0.5$ بدست می آید

$$J_1^*(1) = 0.75$$

$$J_1^*(0.5) = 0.25 \rightsquigarrow \underbrace{u_2 = 0}_{}$$

کنترل بهینه

$$J_1^*(1.5) = 1.5 \rightsquigarrow u_2 = -0.5$$

در مرحله بعد مسیرهای بهینه برای گذر از حالت $X_0$ به $X_1$ را پیدا می‌کنیم.

| $x_0$ | $x_1$ | $u$ | $J_{01}$ | $J^*(x_1)$ | $J_0(x_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0.5 | -0.5 | 0.5 | 0.25 | 0.25 |
| | 1 | -1 | 2 | 0.75 | 0.75 |
| | 1.5 | — | — | 1.5 | 1.5 |

کنترل بهینه
$u = 0$

به طور خلاصه اگر بخواهیم مسأله

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$J = h(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t), t)\, dt$$

$x_k = x(t_k)$

$t_k = k\Delta t$

$T = N\Delta t$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t\, f(x_k, u_k, t_k)$$

$$J = h(x_N) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, u_k, t_k)$$

فرض می‌کنیم $x_k$ حالت‌های انتخابی $\{y^1, y^2, \dots, y^m\}$ را داشته باشد.

$$\frac{y^j - y^i}{\Delta t} = f(y_i, u, t_k) \qquad (1)$$

کنترل $u$ ما $y^i$ را در زمان $t_k$ به حالت $y^j$ تبدیل می‌کند

اگر معادله بالا جواب داشت آن را با $u_k^{ij}$ نشان می‌دهیم.

هزینه گذر از حالت $y^i$ به $y^j$ در زمان $t_k$ $= J_k^{ij}$

$$J_k^{ij} = \begin{cases} \Delta t \; g(y^i, u_k^{ij}, t_k) & \text{به شرط آنکه (1) جواب دارد.} \\ +\infty & \text{اگر (1) جواب نداشت} \end{cases}$$

$$J_N^i = h(y^i)$$

$$J_{N-1}^*(y^i) = \min_j \left\{ J_{N-1}^{ij} + J_N^j \right\}$$

$$J_{N-2}^*(y^i) = \min_j \left\{ J_{N-2}^{ij} + J_{N-1}^*(y^j) \right\}$$

$$\vdots$$

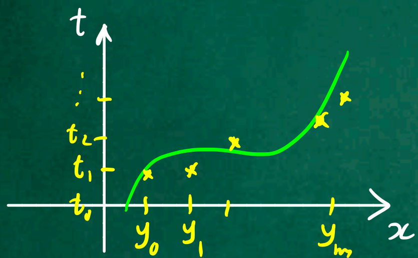
$$J_0^*(y^i)$$

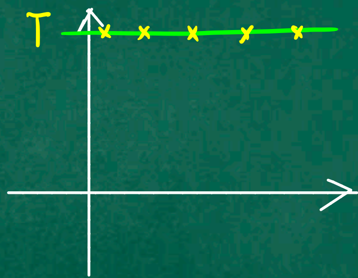
نکته - اگر معادله (۱) جواب یکتا نداشت ، از بین همه کنترل‌های ممکن ، آن را انتخاب می‌کنیم که

$$g(y^i, u, t_k)$$

می‌نیمم باشد.

نکته - اگر زمان نهایی مشخص نباشد و از روی قید $m(x(t_f), t_f) = 0$ به دست بیاید




خم جواب $m(x,t)=0$ را روی شبکه گسسته شده تقریب می‌زنیم و نقاط انتهای مسیر نقاط روی این خم هستند.

دینامیک خطی $\quad x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad$ روش حل تحلیلی

$$J = \frac{1}{2} x_N^T H x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{2}\left[x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k\right]}_{g_k(x_k, u_k)}$$

متقارن هستند. $\quad R_k > 0 , \ H, Q_k \geq 0$

$$J_N^*[x_N] = \frac{1}{2} x_N^T H x_N$$

$$J_{N-1}^*[x_{N-1}] = \min_{u_{N-1}} \left( g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_N^*[x_N] \right)$$

$$= \min_{u_{N-1}} \left[ g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + \frac{1}{2} x_N^T H x_N \right]$$

$$x_N = A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1}$$

کنترل بهینه از حل معادله

$$\frac{\partial}{\partial u_{N-1}}\left[ g_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + \frac{1}{2} x_N^T H x_N \right] = 0$$

به دست می‌آید.

$$R_{N-1} u_{N-1} + B_{N-1}^T H B_{N-1} u_{N-1} + B_{N-1}^T H A_{N-1} x_{N-1} = 0$$

$$\Rightarrow u_{N-1} = -\left[ R_{N-1} + B_{N-1}^T H B_{N-1} \right]^{-1} B_{N-1}^T H A_{N-1} x_{N-1}$$

$$= -F_{N-1} x_{N-1}$$

تذکر: اگر مشتق دوم را حساب کنیم $\frac{\partial^2}{\partial u_{N-1}^2}[\cdots] = R_{N-1} + B_{N-1}^T H B_{N-1} > 0$ و در نتیجه $u_{N-1}$ که از معادله

بالا به دست می‌آید نقطه مینیمم است.

$$J^*_{N-2}[x_{N-2}] = \min_{u_{N-2}} \left( g_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J^*_{N-1}[x_{N-1}] \right)$$

$$x_{N-1} = A_{N-2}\, x_{N-2} + B_{N-2}\, u_{N-2}$$

کنترل بهینه با عملگر $u_k = -F_k\, x_k$ به دست می‌آید که ماتریس‌های $F_k$ به صورت بازگشتی محاسبه می‌شوند:

$$J^*_{N-1}[x_{N-1}] = \frac{1}{2} x^T_{N-1} \Big[ Q_{N-1} + F^T_{N-1} R_{N-1} F_{N-1} + $$

$$+ (A_{N-1} - B_{N-1} F_{N-1})^T H (A_{N-1} - B_{N-1} F_{N-1}) \Big] x_{N-1}$$

$$= \frac{1}{2} x^T_{N-1}\, P_{N-1}\, x_{N-1}$$

$$F_k = \left[ R_k + B_k^T P_{k+1} B_k \right]^{-1} B_k^T P_{k+1} A_k$$

که ماتریس $P_{k+1}$ از حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$P_k = Q_k + F_k^T R_k F_k + (A_k - B_k F_k)^T P_{k+1} (A_k - B_k F_k) \qquad (2)$$

در پایان

$$J_0^*[x_0] = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$$

تذکر- اگر $A_k = A$، $B_k = B$، $Q_k = Q$ و $R_k = R$ ماتریس‌های ثابت باشند. و اگر $N$ به اندازه کافی بزرگ باشد، ماتریس $P_0$، نقطه تعادل دینامیک ماتریسی $P_k$ است به شرط آنکه $P_0$ نقطه تعادل پایدار باشد. (قدر مطلق مقادیر ویژه $A-BF_0$ کوچکتر از یک باشد)

$$\begin{cases} F_0 = \left[ R + B^T P_0 B \right]^{-1} B^T P_0 A \\ P_0 = Q + F_0^T R F_0 + (A - B F_0)^T P_0 (A - B F_0) \end{cases}$$

تمرین- در مثال ۶ جلسه اول فرض کنید $\omega_k$ توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ . تابع هزینه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$J = \frac{1}{2} x_N^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 + u_k^2$$

به کمک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا کمترین هزینه با نقطه شروع $x_0$ را پیدا کنید.

( همچنین قید $u_k + x_k \le M$ را در نظر بگیرید. )