کنترل بهینه

جلسه بیست و پنج ۹۹/۱۰/۶

روش SQP

اگر $f: U \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\min_{u \in U} f(u)$$

اگر $\bar{u}$ نقطه مینیمم باشد، باید $f'(\bar{u})=0$ و به یک روش به دنبال ریشه تقاضات f هستیم.

در روش نیوتن دنباله بازگشتی

$$u_{n+1} = u_n - \left(f''(u_n)\right)^{-1} f'(u_n)$$

را می‌سازیم. در حقیقت u_{n+1} ریشه معادله

$$f'(u_n) + f''(u_n)(u - u_n) = 0$$

است. جواب این رابطه معادل است با حل مسئله درجه ۲ زیر:

$$\min \left\{ f'(u_n)(u-u_n) + \frac{1}{2} f''(u_n)[u-u_n, u-u_n] \right\}$$

درحقیقت عبارت بالا تقریب درجه ۲ (جمله‌ای تیلور مرتبه دوم) تابع f در همسایگی نقطه u_n است.

کاربرد این روش در حل مسأله کنترل بهینه غیرخطی:

$$\min J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x,y(x))\,dx + \int_\Omega \psi(x,u(x))\,dx$$

Subject

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$U_{ad} = \{ u_a \le u \le u_b \}$$

سیستم بهینگی متناظر این مسأله عبارت است از:

$$\begin{cases} -\Delta y + d(x,y) = u, \qquad -\Delta p + d_y(x,y)p = \varphi_y \\ \int (\psi_u + p)(u - \bar{u}) \ge 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \end{cases}$$

اگر $U_{ad} = L^\infty(\Omega)$، آنگاه نامساوی تغییراتی بالا به تساوی $\psi_u + p = 0$ تبدیل می‌شود.

$$L(y,u,p) = J(y,u) + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla y + p\big(d(x,y) - u\big)\, dx$$

$$\begin{cases} \partial_p L = 0 \\ \partial_y L = 0 \\ \partial_u L = 0 \end{cases}$$

بنابراین به دنبال ریشه $\nabla L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$ هستیم، که در روش SQP با داشتن نقطه $X_n = (y_n, u_n, p_n)$

سترهای $X_{n+1} = (y_{n+1}, u_{n+1}, p_{n+1})$ جواب مسئله زیر است

$$(1) \qquad L'(X_n) + L''(X_n)(X - X_n) = 0$$

این عبارت متناظر لاگرانژین مسئله بهینه‌سازی زیر است:

$$\min \left\{ J'(y_n, u_n)(y - y_n, u - u_n) + \frac{1}{2} L''(y_n, u_n, p_n)[y - y_n, u - u_n] \right\}$$

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} -\Delta y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)(y - y_n) = u \\ \partial_n y = 0 \end{cases}$$

خلاصه SQP

$$\begin{cases} \min & f(u) \\ \text{Subjet} & g(u) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \min & f'(u_n)(u-u_n) + \frac{1}{2} f''(u_n)[u-u_n, u-u_n] \\ \text{Subjet to} & g(u_n) + g'(u_n)(u-u_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min & J(y,u) \\ \text{Subjet to} & G(y,u) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \min & J'(y_n,u_n)(y-y_n, u-u_n) + \frac{1}{2} L''(y_n,u_n,P_n)[(y-y_n, u-u_n)]^2 \\ \text{Subjet to} & G(y_n,u_n) + G'(y_n,u_n)[y-y_n, u-u_n] = 0 \end{cases}$$

تمرین - برای مسئله بالا تابع لاگرانژین را تعریف کنید. اگر آن $\tilde{L}(y,u,p)$ باشد، نشان دهید جواب

$$\begin{cases} \partial_y \tilde{L} = 0 \\ \partial_u \tilde{L} = 0 \\ \partial_p \tilde{L} = 0 \end{cases}$$

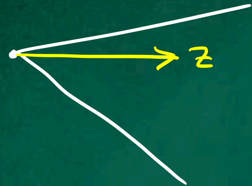
با جواب (1) برابر است.

نکته- رابطه (۱) بدین معناست که

$$L' = \begin{pmatrix} \partial_y L \\ \partial_u L \\ \partial_p L \end{pmatrix}$$

$$L'' = \begin{pmatrix} \partial_{yy} L & \partial_{yu} L & \partial_{yp} L \\ \partial_{uy} L & \partial_{uu} L & \partial_{up} L \\ \partial_{py} L & \partial_{pu} L & \partial_{pp} L \end{pmatrix}$$

$$L'' \begin{pmatrix} y - y_n \\ u - u_n \\ p - p_n \end{pmatrix} = L'(y_n, u_n, p_n)$$



مسائل بهینه‌سازی در فضاهای باناخ

U و Z فضاهای باناخ هستند و $C \subset U$ یک مجموعه محدب ناتهی است.

تعریف- مجموعه $K \subset Z$ را یک مخروط به رأس مبدأ گوییم، هرگاه برای هر $z \in K$ و $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda z \in K$.

مثال- $K = \{u \in L^2 : u(x) \geq 0\}$ یک مخروط است.

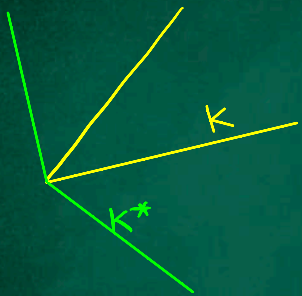
تعریف- اگر $K \subset Z$ یک مخروط محدب باشد، آنگاه رابطه ترتیب زیر روی Z تعریف می‌شود:

$$z_1 \leq_K z_2 \iff z_2 - z_1 \in K$$

اگر $z_1 \leq_K z_2$ و $z_2 \leq_K z_3$ آنگاه $z_1 \leq_K z_3$.

$$z_2 - z_1 \in K, \quad z_3 - z_2 \in K \xRightarrow{\text{محدب } K} \frac{(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)}{2} \in K \Rightarrow z_3 - z_1 \in K \Rightarrow z_1 \leq_K z_3$$

اگر $z_1 \leq_K z_2$ آنگاه $-z_2 \leq_K -z_1$



تعریف- اگر $K \subseteq Z$ یک مخروط باشد، مخروط دوگان آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K^* = \left\{ z^* \in Z' : \quad \langle z^*, z \rangle_{Z',Z} \geq 0 \quad \forall\, z \in K \right\}$$

مثال- $K = \{ u \in L^2(\Omega) : u(x) \geq 0 \}$ یک مخروط در $L^2(\Omega)$ است.

$$K^* = \left\{ v \in (L^2)' \cong L^2 \; : \; \langle v, u \rangle = \int_\Omega v u \, dx \geq 0 \quad \forall u \in K \right\}$$

$$= \left\{ v \in L^2 : \; v \geq 0 \right\} = K$$

مثال- $K = \{0\}$ آنگاه $K^* = Z'$.

اگر $K = Z$ آنگاه $K^* = \{0\}$

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

$C \subseteq U$ محدب

$G: U \longrightarrow Z$

K مخروط محدب در Z

$$(2) \begin{cases} \min f(u) \\ u \in C, \quad G(u) \leq_K 0 \end{cases}$$

(رابطه $G(u) \leq_K 0$ معادل است با اینکه $-G(u) \in K$)

تعریف- $L: U \times Z' \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر لاگرانژین متناظر مسأله (2) می‌نامیم.

$$L(u, z^*) = f(u) + \langle z^*, G(u) \rangle_{Z', Z}$$

نقطه $(\bar{u}, z^*) \in C \times K^*$ را نقطه زینی L گوییم هرگاه

$$\forall u \in C, \ v^* \in K^*$$

$$L(\bar{u}, v^*) \leq L(\bar{u}, z^*) \leq L(u, z^*)$$

اگر نقطه زینی $(\bar{u}, z^*)$ دارای این خاصیت باشد که $\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle = 0$ آنگاه $\bar{u}$ جواب (2) است.

قضیه- فرض کنید $\mathcal{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}$ و $G: U \longrightarrow Z$ عملگر محدب باشند و $\bar{u}$ جواب مسأله (۲) باشد.

به علاوه فرض کنید $\tilde{u} \in C$ وجود داشته باشد که

$$-G(\tilde{u}) \in \operatorname{int} K$$

در این صورت $z^* \in K^*$ وجود دارد به طوری که $(\bar{u}, z^*)$ نقطه زینی لاگرانژین L است. به علاوه

$$\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle_{Z', Z} = 0$$

تعریف- عملگر $G: U \longrightarrow Z$ را محدب گوییم هرگاه

$$G(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq_K \lambda G(u) + (1-\lambda) G(v)$$

قضیه- اگر $\mathcal{f}$ و G به معنای گاتو مشتق پذیر باشند و $\bar{u}$ جواب (۲) باشد، آنگاه

$$\partial_u L(\bar{u}, z^*)(u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in C$$

به راحتی می‌توان دید که

$$0 \le \partial_u L(\bar{u}, z^*)(u-\bar{u}) = f'(\bar{u})(u-\bar{u}) + \langle z^*, G'(\bar{u})(u-\bar{u}) \rangle_{Z',Z}$$

$$= \langle f'(\bar{u}) + (G'(\bar{u}))^* z^* , u-\bar{u} \rangle_{U',U}$$

نکته- اگر K مخروط توابع مثبت در $Z = L^2(\Omega)$ باشد، آنگاه درون K تهی است. (چرا؟) و در این حالت نمی‌توان از قضیهٔ قبل استفاده کرد. به همین منظور به اجبار فضای Z را توابع پیوستهٔ $C(\bar{\Omega})$ می‌گیریم. (در این حالت مخروط توابع مثبت درون ناتهی دارد)

کاربرد:

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta y + y = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u_a \le u \le u_b, \qquad y(x) \le 0$$

$$\min \ J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

اگر $G: u \longmapsto y$ نگاشت کنترل-حالت باشد و K را مخروط توابع مثبت در $C(\Omega)$ بگیریم

اگر $u \in L^p(\Omega)$ که $p > \frac{n}{2}$ میدانیم $y = G(u) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

$$\begin{cases} \min \quad f(u) = J(G(u), u) \\ G(u) \leq_K 0 \qquad , \; u \in U_{ad} \end{cases}$$

G یک نگاشت خطی است و در نتیجه محدب است. همچنین به راحتی می‌توان دید که f یک نگاشت محدب است.

<u>فرضیه‌ی جدید</u>: $\tilde{u} \in U_{ad}$ وجود دارد که $\tilde{y} = G(\tilde{u})$ در رابطه $\tilde{y}(x) < 0$ برای هر $x \in \Omega$ صدق کند.

از دو قضیه نتیجه می‌شود که $z^* \in K^*$ وجود دارد که

$$\langle z^*, G(\bar{u}) \rangle = 0$$

$$\langle f'(\bar{u}) + (G'(\bar{u}))^* z^*, u - \bar{u} \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$Z = C(\bar{\Omega}) \Leftarrow Z^* = \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ فضای همه اندازه‌های برل روی $\bar{\Omega}$.

و K^* مخروط اندازه‌های برل مثبت روی $\bar{\Omega}$.

$$\langle \mu , y \rangle_{Z', Z} = \int_{\bar{\Omega}} y(x)\, d\mu$$

اگر $(\bar{y}, \bar{u})$ جواب مسئله (3) باشد، باید اندازه برل مثبت μ وجود داشته باشد که

$$\langle \mu , G(\bar{u}) \rangle = \int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x)\, d\mu = 0$$

$$\langle f'(\bar{u}) + (G'(\bar{u}))^* \mu \ , \ u - \bar{u} \rangle \geq 0$$

G یک نگاشت خطی است پس $G'(\bar{u}) = G$.

$$G : L^p \longrightarrow C(\bar{\Omega})$$

$$G^* : \mathcal{M}(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^q$$

$$\langle G^* \mu , v \rangle_{L^q, L^p} = \langle \mu , G(v) \rangle = \int_{\bar{\Omega}} G(v)\, d\mu$$

جواب $z=G(v)$ مسأله PDE زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta z + z = v \\ \partial_n z = 0 \end{cases}$$

اگر $p=G^*\mu$ آنگاه

$$\int_{\bar{\Omega}} z(x)\,d\mu = \langle G^*\mu, v\rangle = \int_\Omega p v\,dx = \int_\Omega p(-\Delta z+z)\,dx$$

$$= \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla z + pz\,dx = \int_\Omega (-\Delta p+p)z\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n p\cdot z\,d\sigma$$

اگر $\mu=\mu_\Omega+\mu_\Gamma$ که تکیه‌گاه اندازه‌ی μ_Ω و μ_Γ به ترتیب Ω و $\partial\Omega$ است، آنگاه باید p جواب مسأله زیر باشد:

$$(4)\begin{cases} -\Delta p + p = \mu_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = \mu_\Gamma & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

منظور از جواب مسأله بالا تابع $p \in H^1(\Omega)$ است که برای هر $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla v + p v \, dx = \int_\Omega v \, d\mu_\Omega + \int_{\partial\Omega} v \, d\mu_p$$

به طور خلاصه شرط لازم مسأله (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{y}, \bar{u}) \text{ در مسأله (3) صدق می‌کند.} \\ \int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x)\, d\mu = 0 \quad , \mu \geq 0 \quad , \bar{y}(x) \leq 0 \\ (f'(\bar{u}) + p \, , \, u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \\ p \text{ جواب مسأله (4) است} \end{array} \right.$$

$$f'(\bar{u}) = \lambda \bar{u} + \bar{p} \qquad \begin{cases} -\Delta \bar{p} + \bar{p} = \bar{y} - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n \bar{p} = 0 \end{cases}$$

تذکر- شرط $\int_{\bar{\Omega}} \bar{y}(x)\, d\mu = 0$ با توجه به اینکه $\bar{y} \le 0$ و $\mu \ge 0$ نشان می‌دهد که

$$\operatorname{Supp} \mu \subseteq \{ x : \bar{y}(x) = 0 \}$$

تمرین- مسئله (3) را با شرط $-1 \le y(x) \le 1$ حل کنید.

$$G(u) = \begin{pmatrix} y(x) - 1 \\ -1 - y(x) \end{pmatrix} \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$$

با در نظر گرفتن مخروط $K \times K$ که K مجموعه توابع مثبت است، قید دوطرفه $-1 \le y \le 1$

به رابطه $G(u) \le_{K \times K} 0$ می‌رسیم.