کنترل بهینه

جلسه بیست و چهار 99/10/1

شرط کافی مرتبه دوم:

U فضای باناخ است. $C \subseteq U$ محدب و بسته است.

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ دو بار مشتق (فرشه) پیوسته دارد. اگر $\bar{u}$ در شرط لازم مرتبه اول

$$\langle f'(\bar{u}), u-\bar{u} \rangle \geq 0 \qquad \forall u \in C$$

صدق کند. به علاوه اگر $\delta>0$ وجود داشته باشد که

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|_U^2 \qquad \forall h \in U$$

آنگاه $\varepsilon>0$ و $\sigma>0$ وجود دارند به طوری که

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|_U^2 \qquad \forall u \in C\,,\ \|u-\bar{u}\|_U < \epsilon$$

در نتیجه $\bar{u}$ یک نقطه می‌نیمم موضعی است.

اثبات - $F(t) = f(\bar{u} + t(u-\bar{u})) \rightsquigarrow$ تابع C^2 است.

$$f(u) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\theta) \qquad 0<\theta<1$$

$$= f(\bar{u}) + \langle f'(\bar{u}), u-\bar{u} \rangle + \frac{1}{2} f''(\bar{u}+\theta(u-\bar{u}))[u-\bar{u}, u-\bar{u}]$$

$$\geq f(\bar{u}) + \frac{1}{2} f''(\bar{u})[u-\bar{u}, u-\bar{u}] + \frac{1}{2}\left(f''(\bar{u}+\theta(u-\bar{u})) - f''(\bar{u})\right)[u-\bar{u}, u-\bar{u}]$$

$$\geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{2}\|u-\bar{u}\|_U^2 - \frac{\delta}{4}\|u-\bar{u}\|_U^2$$

پیوستگی مشتق دوم تضمین می‌دهد که اگر $\|u-\bar{u}\| < \epsilon$ آنگاه

$$\| f''(\bar{u}+\theta(u-\bar{u})) - f''(\bar{u}) \| < \frac{\delta}{4}$$

نرم روی فضای نگاشت‌های دوخطی روی

مثال- $x \in C = \{x \in L^2(0,1) : 0 \le x(t) \le 2\pi\}$, $f(x) = -\int_0^1 \cos(x(t))\,dt$

$$\min_{x \in C} f(x) ,$$

واضح است که مینیمم وقتی بدست می‌آید که $x(t) \in \{0, 2\pi\}$. به عنوان مثال $\bar{x} \equiv 0$ یک جواب مسئله بهینه‌سازی است.

$$\langle f'(\bar{x}), h \rangle = \int_0^1 \sin(\bar{x}(t)) \cdot h(t)\,dt = 0$$

$$f''(\bar{x})[h,h] = \int_0^1 \cos(\bar{x}(t))\, h(t)^2\,dt = \int_0^1 h^2(t)\,dt = \|h\|^2$$

اگر $x_\epsilon(t) = \begin{cases} 2\pi & 0 \le t \le \epsilon \\ 0 & \epsilon < t \le 1 \end{cases}$ به وضوح $f(x_\epsilon) = -1$. این مطلب با نتیجه شرط کافی مرتبه دوم

در تناقض است $\qquad \underbrace{f(x_\epsilon)}_{=-1} \ge \underbrace{f(\bar{x})}_{=-1} + \sigma \|\bar{x} - x_\epsilon\|^2$

در حالیکه $\qquad 0 \leftarrow \|\bar{x} - x_\epsilon\| = 2\pi\sqrt{\epsilon}$

نکته مهم این است که تابع f در این شکل روی $L^2(0,1)$ به معنای فرشه دوبار مشتق‌پذیر نیست.

$x \longmapsto \cos x$ یک عملگر نمِتسکی است که بنابر شرایطی که قبلاً مطرح شد روی L^∞ دوبار مشتق‌پذیر است.

اگر شرط کافی مرتبه دوم را روی L^∞ داشته باشیم، توابع x_ϵ در مثال قبل تناقضی ایجاد نمی‌کنند. زیرا $\|\bar{x} - x_\epsilon\|_\infty = 2\pi$

و x_ϵ در همسایگی به اندازه کافی کوچک $\bar{x}$ قرار نمی‌گیرد.

با تغییر نرم L^2 به L^∞ مشکل جدیدی که داریم این است که نامساوی

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|_\infty^2$$

$$\|$$

$$\int_0^1 \cos(0)\, |h(t)|^2 dt$$

برقرار نیست.

برای حل این مشکل راهکار معروفی وجود دارد به نام two-norm discrepancy. در واقع شرط

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|_{L^2}^2$$

با نرم L^2 بررسی می‌کنیم.

و چون f روی L^∞ مشتق‌پذیر است نتیجه می‌گیریم

$$f(u) \ge f(\bar{u}) + \sigma \|u-\bar{u}\|_{L^2}^2 \qquad \|u-\bar{u}\|_{L^\infty} < \epsilon$$

را با نرم L^∞ می‌نویسیم .

قضیه - اگر $f: L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق پیوسته داشته باشد و

$$\langle f'(\bar{u}), u-\bar{u} \rangle \ge 0 \qquad \forall u \in C$$

و

$$f''(\bar{u})[h,h] \ge \delta \|h\|_{L^2}^2 \qquad \forall h \in L^\infty$$

به علاوه اگر f'' در $\bar{u}$ به طور موضعی لیپشیتز باشد یعنی برای هر M مقدار $L(M)$ وجود دارد که

$$\left| f''(\bar{u}+h)[u_1,u_2] - f''(\bar{u})[u_1,u_2] \right| \le L(M) \cdot \|h\|_{L^\infty} \cdot \|u_1\|_{L^2} \cdot \|u_2\|_{L^2}$$

برای هر $\|h\|_{L^\infty} \le M$ و هر $u_1,u_2 \in L^\infty$. آنگاه $\epsilon , \sigma > 0$ وجود دارند که

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \sigma \, \|u-\bar{u}\|_{L^2}^2 \qquad \|u-\bar{u}\|_{L^\infty} < \epsilon$$

اثبات ـ مشابه اثبات قبل به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f(u) \geq f(\bar{u}) + \frac{1}{2} f''(\bar{u})[u-\bar{u}, u-\bar{u}] + \frac{1}{2}\left(f''(\bar{u}+\theta(u-\bar{u})) - f''(\bar{u})\right)[u-\bar{u}, u-\bar{u}]$$

$$\geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{2} \|u-\bar{u}\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} L(M) \cdot \|u-\bar{u}\|_{L^\infty} \cdot \|u-\bar{u}\|_{L^2}^2$$

$$\geq f(\bar{u}) + \frac{\delta}{4} \|u-\bar{u}\|_{L^2}^2$$

$$\frac{1}{2} L(M) \, \|u-\bar{u}\|_{L^\infty} < \frac{\epsilon L(M)}{2} < \frac{\delta}{4}$$ به شرط آنکه

کاربرد در مسائل کنترل بهینه

$$\begin{cases} -\Delta y + c_0(x)\, y + d(x,y) = u \\ \partial_n y = 0 \end{cases}$$

$$G(y,u) : H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \longrightarrow (H^1)'$$

نگاشت کنترل ـ حالت $\quad S : L^\infty \longrightarrow H^1 \cap L^\infty$

$$G(Su, u) = 0$$

اگر $d(x,y)$ به عنوان یک عملگر نمتسکی شرایط خوبی داشته باشد، نگاشت G دوبار مشتق پیوسته دارد.

بنابر قضیه تابع ضمنی S یک نگاشت C^2 است.

$$\partial_y G(Su,u)\,[S'(u) v_1] + \partial_u G(Su,u)\, v_1 = 0$$

$$\partial_y G(Su,u)\left(S''(u)[v_1, v_2]\right) + \partial_{yy} G(Su,u)\,[S'(u)v_1 ,\, S'(u)v_2]$$

$$+ \partial_{yu} G(Su,u)\,[S'(u)v_1 ,\, v_2] + \partial_{uy} G(Su,u)\,[v_1 ,\, S'(u)v_2] + \partial_{uu} G(Su,u)\,[v_1, v_2] = 0$$

$$\partial_y G \cdot z = f \quad \text{in } (H^1)' \quad \Rightarrow \begin{cases} -\Delta z + c_0 z + d_y(x,y) z = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\partial_{yy} G\,[z_1, z_2] = d_{yy}(x,y)\, z_1 z_2 \quad \text{in } (H^1)'$$

$$\partial_{uu} G = 0 \quad , \quad \partial_{uy} G = 0 \quad , \quad \partial_{yu} G = 0$$

$$\Rightarrow \quad S''(u)[v_1, v_2] = -\left(\partial_y G\right)^{-1} \left(d_{yy}(x,y)\, z_1 z_2 \right)$$

$$z_i = S'(u) v_i \quad \Rightarrow (1) \begin{cases} -\Delta z_i + c_0 z_i + d_y(x,y) z_i = v_i \\ \partial_n z_i = 0 \end{cases}$$

$$w = S''(u)[v_1, v_2] \quad \Rightarrow (2) \begin{cases} -\Delta w + c_0 w + d_y(x,y)\, w = -d_{yy}(x,y) z_1 z_2 \\ \partial_n w = 0 \end{cases}$$

$$f(u) = J(Su, u)$$

$f''(\bar{u})$ محاسبه

$$\langle f'(\bar{u}), v_1 \rangle = \langle \partial_y J(\bar{y}, \bar{u}), S'(\bar{u}) v_1 \rangle + \langle \partial_u J(\bar{y}, \bar{u}), v_1 \rangle$$

$$f''(\bar{u})[v_1, v_2] = \langle \partial_y J(\bar{y}, \bar{u}), S''(\bar{u})[v_1, v_2] \rangle + \partial_{yy} J(\bar{y}, \bar{u}) [S'(\bar{u}) v_1, S'(\bar{u}) v_2]$$

$$+ \partial_{uy} J(\bar{y}, \bar{u}) [S'(\bar{u}) v_1, v_2] + \partial_{yu} J(\bar{y}, \bar{u}) [v_1, S'(\bar{u}) v_2]$$

$$+ \partial_{uu} J(\bar{y}, \bar{u}) [v_1, v_2]$$

$$= \langle \partial_y J(\bar{y}, \bar{u}), S''(\bar{u})[v_1, v_2] \rangle + J''(\bar{y}, \bar{u}) [(z_1, v_1), (z_2, v_2)]$$

$$z_i = S'(\bar{u}) v_i$$

$$= \mathcal{L}''(\bar{y}, \bar{u}, p) [(z_1, v_1), (z_2, v_2)]$$

شرط کافی مرتبه دوم :

$$f''(\bar{u})[h,h] \geq \delta \|h\|^2_{L^2}$$

$$\langle \partial_y J(\bar{y},\bar{u}), w \rangle + J''(\bar{y},\bar{u})[(z,h),(z,h)] \geq \delta \|h\|^2_{L^2}$$

$$\begin{cases} -\Delta z + c_0 z + d_y(x,\bar{y}) z = h & \text{in } \Omega \\ -\Delta w + c_0 w + d_y(x,\bar{y}) w = -d_{yy}(x,\bar{y}) h^2 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x, y(x))\, dx + \int_\Omega \psi(x, u(x))\, dx$$

$$\boxed{\int_\Omega \partial_y \varphi(x,\bar{y}) w + \varphi_{yy}(x,\bar{y}) z^2 + \psi_{uu}(x,\bar{u}) h^2 \, dx \geq \delta \|h\|^2_{L^2}}$$

شرط لیپشیتز بودن f'' :

$$\left| f''(u+h)[u_1,u_2] - f''(u)[u_1,u_2] \right| \le L(M)\, \|h\|_\infty \cdot \|u_1\|_{L^2} \cdot \|u_2\|_{L^2}$$

برای $\|h\|_\infty \le M$.

$$y = Su, \quad y_h = S(u+h), \quad w_h = S''(u+h)[u_1,u_2]$$

$$z_{i,h} = S'(u+h)\, u_i$$

$$\Big| \int_\Omega \varphi_y(x,y_h)\, w_h + \varphi_{yy}(x,y_h)\, z_{1,h}\, z_{2,h} + \varphi_{uu}(x,u+h)\, u_1 u_2 - \varphi_y(x,y)\, w - \varphi_{yy}(x,y)\, z_1 z_2 - \varphi_{uu}(x,u)\, u_1 u_2 \, dx \Big| \le L(M)\, \|h\|_\infty \|u_1\|_{L^2} \cdot \|u_2\|_{L^2}$$

اثبات را در لم 4.26 کتاب نگاه کنید.