کنترل بهینه

جلسه بیست و سه ۹۹/۹/۲۹

$$
\begin{cases}
-\Delta y + c_0(x)y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\
\partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega
\end{cases}
$$

$$
J(y,u) = \int_\Omega \varphi(x, y(x))\,dx + \int_\Omega \psi(x, u(x))\,dx
$$

$$
G(y,u) : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)'
$$

$$
\langle G(y,u), \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi + c_0(x) y \varphi + d(x,y)\varphi - u\varphi \,dx
$$

جواب ضعیف معادله بالا متناظر رابطه $G(y,u)=0$ است.

قضیه وجود جواب نشان می‌دهد عملگر (غیرخطی) $S : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ وجود دارد که $G(Su,u)=0$

(یا $S : L^r \to H^1 \cap L^\infty$ برای $r > \frac{n}{2}$)

$$f(u) = J(Su, u)$$

شرط لازم بهینگی :

$$f'(\bar{u})(u-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$\parallel$$

$$\langle \partial_y J, S'(\bar{u})(u-\bar{u}) \rangle + \langle \partial_u J, u-\bar{u} \rangle \geq 0$$

$$= \langle (S'(\bar{u}))^* \partial_y J + \partial_u J, u-\bar{u} \rangle \geq 0$$

<u>مشتق‌پذیری</u> S : به کمک قضیه تابع ضمنی نشان می‌دهیم S مشتق‌پذیر است.

در گام اول باید ببینیم که آیا G یک نگاشت C^1 است؟ تنها جمله غیرخطی در نگاشت G عبارت $y \mapsto d(x,y)$ است که به عنوان یک عملگر نمیتسکی اگر $d_y(x,y)$ یک عملگر نمیتسکی خوش‌تعریف ارائه کند آنگاه G، C^1 خواهد شد.

در گام دوم باید بررسی کنیم آیا $(H^1)' \longrightarrow H^1 : \partial_y G(y_0, u_0)$ وارون پیوسته دارد؟ ($G(y_0,u_0)=0$ یا $y_0 = Su_0$)

$$\langle \partial_y G(y_0,u_0)(z), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla \varphi + c_0 z \varphi + d_y(x, y_0(x)) z \varphi \, dx \qquad (1)$$

یک به یکی $\partial_y G$ به این معنا است که اگر $\partial_y G(y_0,u_0)(z) = 0$ در $(H^1)'$ یا به طور معادل رابطه انتگرالی بالا برای هر $\varphi \in H^1(\Omega)$ برابر صفر باشد، باید $z = 0$. این بدان معنا است که z جواب ضعیف معادله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta z + c_0 z + d_y(x, y_0) z = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تنها جواب این معادله $z = 0$ است زیرا در رابطه (1) قرار دهید $\varphi = z$. با توجه به شرایط وجود جواب که $0 \le c_0$ و $d(x,y)$ نسبت به y صعودی است و در نتیجه $d_y(x,y) \ge 0$ از برابری (1) با صفر نتیجه می‌شود که $z = 0$.

همچنین پوشا بودن $\partial_y G$ به این معناست که برای هر $f \in (H^1)'$ رابطه (1) برابر $\int_\Omega f \varphi \, dx$ بشود یا به طور معادل z جواب ضعیف

$$
(2) \qquad \begin{cases} -\Delta z + c_0 z + d_y(x,y_0)\, z = f & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}
$$

که بنابر قضایای وجود جواب PDE می‌دانیم $z \in H^1$ جواب معادله بالا وجود دارد و

$$
\|z\|_{H^1(\Omega)} \le C \|f\|_{(H^1)'}
$$

که ثابت C مستقل از f است.

درنتیجه $\partial_y G$ وارون پیوسته دارد و می‌توان از قضیه تابع ضمنی استفاده کرد.

$$
G(Su, u) = 0
$$

$$
\partial_y G(y_0, u_0) \cdot S'(u_0) = -\partial_u G(y_0, u_0)
$$

این تساوی در $L(L^2, (H^1)')$ برقرار است.

اگر $z = S'(u_0)v$ آنگاه $\partial_y G(y_0,u_0)\cdot z = -\partial_u G(y_0,u_0)\, v$ که این تساوی در $(H^1)'$ برقرار است.

درواقع z جواب (2) است که $f = -\partial_u G(y_0, u_0)v$. اما داریم $-\partial_u G(y_0, u_0)v = v$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta z + c_0(x) z + d_y(x, y_0) z = v & \text{in } \Omega \\ \partial_n z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (3)$$

$z = S'(u_0)v$ جواب معادله بالا است . $\quad S : L^2 \longrightarrow H^1$

$$S'(u_0) : L^2 \longrightarrow H^1 \quad , \quad (S'(u_0))^* : (H^1)' \longrightarrow L^2$$

$$\left((S'(u_0))^* g \,,\, v \right)_{L^2} = \langle g \,,\, S'(u_0) v \rangle_{(H^1)', H^1}$$

$z = S'(u_0)v$ در (3) صدق می‌کند و $p \in H^1(\Omega)$ جواب مسأله زیر بگیرید :

$$\begin{cases} -\Delta p + c_0(x) p + d_y(x, y_0) p = g & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (4)$$

که به عنوان جواب ضعیف به معنای تساوی زیر است :

$$\int_\Omega \nabla p\cdot\nabla\varphi + c_0(x)\,p\varphi + d_y(x,y_0)\,p\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx = \langle g,\varphi\rangle_{(H^1)',H^1}$$

قرار دهید $\varphi = z$. آنگاه بنا بر تعریف جواب ضعیف (3) نتیجه می‌شود :

$$\langle g,z\rangle = \int_\Omega \nabla p\cdot\nabla z + c_0\,pz + d_y(x,y_0)\,pz\,dx = \int_\Omega v\,p\,dx$$

درنتیجه $(S'(u_0))^* g = p$ که p جواب (4) است.

<u>جمع‌بندی</u>: شرط لازم مرتبه اول بهینگی عبارتست از :

$$\left(p+\psi_u(x,\bar u)\,,\,u-\bar u\right)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall u\in U_{ad}$$

که p جواب مسئله الحاقی زیر است :

(5) $$\begin{cases} -\Delta p + c_0 p + d_y(x,\bar y)\,p = \varphi_y(x,\bar y) & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در واقع $\nabla f(\bar{u}) = p + \Psi_u(\cdot, \bar{u})$.

<u>روش لاگرانژین</u> :

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle G(y,u), p \rangle_{(H^1)', H^1}$$

$$= J(y,u) - \int \nabla y \cdot \nabla p + c_0(x) y p + d(x,y) p - u p \, dx$$

$$\begin{cases} \partial_p L(\bar{y}, \bar{u}, p) = 0 \rightsquigarrow & \text{معادله حالت} \\ \partial_y L(\bar{y}, \bar{u}, p) = 0 \rightsquigarrow & (5) \text{ معادله الحاقی} \\ (\partial_u L(\bar{y}, \bar{u}, p), u - \bar{u}) \geq 0 & \text{نامساوی تغییراتی} \Leftrightarrow \partial_u L \in (FC(\bar{u}))^* \end{cases}$$

تمرین-

$$\begin{cases} -\Delta y + y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + b(x,y,u) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تابع هزینه

$$J(y,u) = \int_{\Omega} \varphi(x,y)\,dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x,u)\,d\sigma$$

$$u \in U_{ad} = \{ u \in L^2(\partial\Omega) : u_a \le u \le u_b \}$$

$u_a, u_b \in L^\infty(\partial\Omega)$.

با روش مستقیم و روش لاگرانژین سیستم بهینگی مسأله کنترل مرزی بالا را طراحی کنید.

شرط مرتبه دوم:

به طور خلاصه اگر روی کنترل u قیدی نداشته باشیم، در کنترل بهینه $\bar{u}$ داریم $f'(\bar{u})=0$

$$f(\bar{u}+h)-f(\bar{u})=\cancel{\langle f'(\bar{u}),h\rangle}_{0}+\frac{1}{2}f''(\bar{u})[h,h]+o(|h|^2)$$

شرط لازم مرتبه دوم: $f''(\bar{u})[h,h]\geq 0$

شرط کافی مرتبه دوم: $f''(\bar{u})[h,h]\geq \alpha|h|^2$

اگر U و V دو فضای باناخ باشند و $f: U\longrightarrow V$ تعریف شده باشد، قبلاً تعریف کردیم که f در $\bar{u}$ مشتق‌پذیر است هرگاه $f'(\bar{u})\in L(U,V)$ وجود داشته باشد که

$$\lim_{u\to 0}\frac{\|f(\bar{u}+u)-f(\bar{u})-\langle f'(\bar{u}),u\rangle\|_V}{\|u\|_U}=0$$

در واقع $f': U\longrightarrow L(U,V)$ تعریف می‌شود. اگر f' به معنای بالا مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f دوبار مشتق‌پذیر است.

$f''(\bar{u}) \in L(\mathcal{U}, L(\mathcal{U}, V))$ یعنی اگر $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ باشد، باید

$$f''(\bar{u})(u_1) \in L(\mathcal{U}, V)$$

$$f''(\bar{u})(u_1)(u_2) \in V$$

بهمین دلیل $f''(\bar{u})$ یک فرم دوخطی روی $\mathcal{U}$ در نظر میگیریم و با $f''(\bar{u})[u_1, u_2]$ نمایش میدهیم.

برای محاسبه میتوان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$f''(\bar{u})[u_1, u_2] = \frac{d^2}{dt\,ds} f(\bar{u} + t u_1 + s u_2)\Big|_{(t,s)=0}$$

$$f''(\bar{u})[u, u] = \frac{d^2}{dt^2} f(\bar{u} + t u)\Big|_{t=0}$$

مثال - قبلاً دیدیم که اگر $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ عملگر نمیتسکی $\Phi(y) = \varphi(x, y(x))$ روی فضای L^∞ تعریف می‌کند تحت شرایطِ کاراتئودوری، کران‌داری (در نقطه $x=0$) و لیپشیتز بودن φ و φ_y عملگر $\Phi: L^\infty \to L^\infty$ مشتق پیوسته دارد و

$$\Phi'(\bar{y})(y) = \varphi_y(x, \bar{y}(x))\, y(x)$$

$$\Phi'(\bar{y}) = \varphi_y(x, \bar{y}(x)) \Rightarrow$$ این تساوی در $L(L^\infty, L^\infty)$ برقرار است.

به طور مشابه اگر φ_{yy} شرایطِ کاراتئودوری، کران‌داری و لیپشیتز بودن را داشته باشد، عملگر Φ به طور پیوسته دوبار مشتق‌پذیر است و

$$\Phi''(\bar{y})[y_1, y_2] = \varphi_{yy}(x, \bar{y}(x))\, y_1(x)\, y_2(x)$$

نکته - با توجه به مثال بالا تحت شرایطِ فوق روی تابع $d(x,y)$ نگاشت $G(y,u)$ یک نگاشت C^2 است و بنابر قضیه تابع ضمنی و بررسی شرایطِ آن که انجام پذیرفت نگاشت کنترل-حالت $S: L^2 \longrightarrow H^1$ ، C^2 است.