کنترل بهینه

جلسه بیست و دو ۹۹/۹/۲۴

نکته. اگر $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ محدود کران دار و $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ شرط کاراتئودوری و شرط رشد چندجمله‌ای

$$|\varphi(x,y)| \leq \alpha(x) + \beta(x)|y|^{p/q}$$

که $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)$ و $1 \leq q \leq p < \infty$. آنگاه

$$\Phi: L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$$

$$\Phi(y) = \varphi(\cdot, y(\cdot))$$

خوش تعریف و پیوسته است. به علاوه اگر $\partial_y \varphi(x,y)$ برای تقریباً هر $x \in \Omega$ وجود داشته باشد و عملگر نمستکی متناظر آن

فضای $L^p(\Omega)$ را به $L^r(\Omega)$ تصویر کند و $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. آنگاه

$\Phi: L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ مشتق پذیر فرشه است.

$$\langle \Phi'(y), h \rangle = \partial_y \varphi(\cdot, y(\cdot))\, h$$

$$\int_\Omega |\partial_y \varphi(x,y(x))\, h(x)|^q dx \leq \left[\int_\Omega |\partial_y \varphi(x,y(x))|^r dx\right]^{q/r} \left[\int_\Omega |h(x)|^p dx\right]^{q/p} < \infty$$

مثال - برای $\varphi(y)=|y|^{k-1}y$ ، عملگر نمسکی متناظر آن $\Phi: L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ پیوسته است برای $1 \le q \le kp$.

$$|\varphi(y)| = |y|^k \le C + |y|^{p/q}$$

چون $\varphi'(y) = k|y|^{k-1}$ ، عملگر نمسکی متناظرش L^p را به L^r تصویر می‌کند که $1 \le r \le (k-1)p$.

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \ge \frac{1}{p} + \frac{1}{(k-1)p} = \frac{k}{k-1} \times \frac{1}{p}$$

درنتیجه عملگر $\Phi: L^p \longrightarrow L^q$ مشتق‌پذیر است هرگاه $1 \le q \le \frac{k-1}{k} p$.

وجود جواب PDE :

$$(1)\begin{cases} -\Delta y + c_0(x) y + d(x,y) = f(x) & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha(x) y + b(x,y) = g(x) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(H1) Ω یک ناحیه کران‌دار با مرز لیپ‌شیتز. توابع $c_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ و $\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ توابع کران‌دار و نامنفی هستند.

به علاوه این دو همزمان صفر نیستند، یعنی $\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} > 0$.

(H2) $d : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $b : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کران‌دار، کاراتئودوری و برای تقریباً هر x ثابت نسبت به y صعودی است.

(H3) $d(x,0)=0$ و $b(x,0)=0$ و توابع b و d کران‌دار باشند.

$$|b(x,y)| \le M \quad , \quad |d(x,y)| \le M \qquad \text{a.e. } x \quad , \forall y \in \mathbb{R}$$

قضیه- اگر فرضیات (H1-3) برقرار باشد و $f\in L^2(\Omega)$ و $g\in L^2(\partial\Omega)$ آنگاه مسأله (1) جواب ضعیف یکتای $y\in H^1(\Omega)$ دارد و

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$$

به‌علاوه اگر $f\in L^r(\Omega)$ و $g\in L^s(\partial\Omega)$ که $r>\frac{n}{2}$, $s>n-1$. (n بعد فضا است) آنگاه y تابع پیوسته روی $\bar\Omega$ است و

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} + \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^r(\Omega)} + \|g\|_{L^s(\partial\Omega)}\right)$$

در نامساوی‌های بالا ثابت C تنها به Ω ، α ، c_0 ، r ، s و M وابسته است.

تذکر- منظور از جواب ضعیف برقراری تساوی زیر برای هر $\varphi\in H^1(\Omega)$ است.

$$\int_\Omega \nabla y\cdot\nabla\varphi + c_0 y\varphi + d(x,y)\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y\varphi + b(x,y)\varphi\, d\sigma = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} g\varphi\, d\sigma$$

تذکر- شرط $b(x,0)=0$ و $d(x,0)=0$ در $(H3)$ ضرورتی ندارد. تنها باید در قضیه قبل در سمت راست نامساوی f و g را

با $f-d(x,0)$ و $g-b(x,0)$ جایگزین کرد.

مساله کنترل بهینه :

$$\begin{cases} -\Delta y + c_0(x)\, y + d(x,y) = u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \int_{\Omega} \varphi(x,y(x))\, dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x,u(x))\, d\sigma$$

$$u \in U_{ad} = \{ u \in L^\infty(\Omega) \ : \ u_a \le u \le u_b \}$$

قضیه قبل نشان میدهد که عملگر کنترل-حالت $G : L^\infty(\Omega) \to H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ خوش تعریف است.

$$y = G(u)$$

بنابراین اگر φ و ψ در شرایط خوش تعریفی عملگر نمیتسکی صدق کنند، آنگاه J خوش تعریف است.

وجود جواب بهینه:

دنباله مینیمم ساز (y_n, u_n) را در نظر می‌گیریم که

$$J(y_n, u_n) \longrightarrow \beta = \inf_{y=G(u)} J(y,u)$$

$$y_n = G(u_n)$$

از طرفی $u_n \in U_{ad}$ در $L^2(\Omega)$ کران دار هستند، بنابراین زیردنباله همگرای ضعیف دارد. برای سادگی زیردنباله را همان u_n می‌گیریم. $u_n \xrightarrow{L^2} \bar{u}$ همچنین $\{y_n\}$ در $H^1(\Omega)$ کران دار است (قضیه وجود جواب) بنابراین زیردنباله‌ای از آن وجود دارد که $y_n \xrightarrow{H^1} \bar{y}$ در نتیجه $y_n \xrightarrow{L^2} \bar{y}$. نقطه $(\bar{y}, \bar{u})$ کاندید جواب بهینه است.

باید نشان دهیم: (1) $\bar{y} = G(\bar{u})$ و $\bar{u} \in U_{ad}$.

(2) J به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است. $J(\bar{y}, \bar{u}) \le \liminf J(y_n, u_n)$

در این صورت $J(\bar{y}, \bar{u}) = \beta$ و $(\bar{y}, \bar{u})$ جواب بهینه است.

دقت کنید $y_n \xrightarrow{L^2} \bar{y}$ به طور قوی، در نتیجه تنها لازم است عملگر نمیتسکی متناظر φ روی $L^2(\Omega)$ پیوسته باشد.

بنابراین نیم‌پیوستگی پایینی ضعیف $u \longmapsto \int_{\partial\Omega} \psi(x,u(x))\,ds$ را لازم داریم. می‌دانیم اگر عملگری پیوسته و محدب باشد، به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است. لذا ψ به غیر از شرایط لازم برای پیوستگی عملگر ψ روی L^2 باید محدب نیز باشد.

برای بررسی شرط $\bar{y} = G(\bar{u})$ دقت کنید که تعریف جواب ضعیف تساوی زیر را می‌دهد:

$$\int_\Omega \nabla y_n \cdot \nabla \varphi + c_0 y_n \varphi + d(x,y_n)\varphi \, dx = \int_\Omega u_n \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

پس از حدگیری و اینکه $u_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} \bar{u}$ و $y_n \xrightarrow{L^2} \bar{y}$ ، $\nabla y_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} \nabla \bar{y}$ نتیجه می‌شود:

$$\int_\Omega \nabla \bar{y} \cdot \nabla \varphi + c_0 \bar{y} \varphi + d(x,\bar{y})\varphi \, dx = \int_\Omega \bar{u} \varphi \, dx$$

اگر عملگر نمیتسکی متناظر $d(x,y)$ روی $L^2(\Omega)$ پیوسته باشد، تساوی بالا به دست می‌آید. در حقیقت این فرض تضمین می‌کند که $G : L^2 \longrightarrow H^1$ پیوسته است وقتی روی L^2 توپولوژی ضعیف داریم.