# کنترل بهینه

جلسه بیست و یک ۱۵/۹/۹۹

**مسائل غیرخطی :**

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta y + c_0(x)\,y + y^3 = u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر $S : u \longmapsto y$ عملگر کنترل ـ حالت باشد، مهمترین چالش بررسی رفتار این عملگر است.

$$\begin{cases} \min\ J(y,u) \\ y = S(u) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(u) = J(S(u),u)$$

توجه کنید که یک عملگر غیرخطی است و شرط لازم مسئله بالا به صورت است :

$$\left( f'(\bar u)\,,\, u-\bar u \right) \geq 0 \qquad \forall\, u \in U_{ad}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle \partial_y J\,,\, S'(\bar u)(u-\bar u) \rangle + \langle \partial_u J\,,\, u-\bar u \rangle = \langle (S'(\bar u))^* \partial_y J + \partial_u J\,,\, u-\bar u \rangle$$

$$\nabla f(\bar{u}) = (S'(\bar{u}))^* \partial_y J + \partial_u J$$

درحقیقت بخش اصلی شناسایی $S$ به عنوان یک عملگر خوش تعریف و مشتق پذیر است.

آیا به ازای هر کنترل $u$، معادله (1) جواب یکتا دارد؟ $\longleftarrow$ خوش تعریفی $S$

اگر جواب سؤال بالا مثبت باشه باید به این سؤال جواب بدیم که آیا $S$ مشتق پذیر است؟

وقتی با یک PDE خطی سروکار داریم همانند مثال قبل، عملگر $S$ خطی و پیوسته می‌شه و به طور طبیعی یک نگاشت مشتق پذیر به دست میاد که مشتق آن برابر خودش بود.

فعلاً فرض کنید $S$ خوش تعریف باشه، معادله (1) را به صورت $G(y, u) = 0$ نمایش بدید. ایده این است که با کمک قضیه تابع ضمنی نشان دهیم جواب $y = S(u)$ از رابطه بالا برای عملگر مشتق پذیر $S$ برقرار است.

$$G : H_0^1 \times L^2 \longrightarrow H^{-1}$$

(2) $$G(y,u) = -\Delta y + c_0(x)\, y + y^3 - u$$

$$\langle G(y,u), \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi + c_0(x)\, y\varphi + y^3\varphi - u\varphi \; dx$$

انتظار داریم $G(y,u)$ یک تابعک خطی پیوسته روی $H_0^1(\Omega)$ باشد. یعنی سمت راست تساوی بالا کوچکتر از $C\|\varphi\|_{H_0^1}$ باشد
که $C$ می‌تواند به $y$ و $u$ وابسته باشد. همه جملات به صورت بدیهی این خاصیت را دارند به غیر از جمله $\int_\Omega y^3\varphi\, dx$ . در نگاه اول داریم:

$$\left| \int_\Omega y^3\varphi \, dx \right| \le \|y^3\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} = \|y\|_{L^6}^3 \cdot \|\varphi\|_{L^2}$$

و هیچ لزومی ندارد که $\|y\|_{L^6}$ کران دار باشد برای هر $y \in H_0^1(\Omega)$ . در حقیقت لازم است که

$$\left| \int_\Omega y^3\varphi \, dx \right| \le C_y \cdot \|\varphi\|_{H_0^1}$$

قضیه نشاندن سوبولف: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ لیپ‌شیتز و کران‌دار باشد، نشاندن پیوسته زیر برقرار است:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \qquad 2 \le p \le 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

یعنی برای هر $\varphi \in H^1(\Omega)$ داریم:

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

نتیجه: اگر $6 \le 2^*$ (یا به طور معادل $N \le 3$) آنگاه $\|y\|_{L^6} \le C \|y\|_{H^1}$ و در نتیجه $y^3 \in L^2 \subseteq H^{-1}$.

برای $N > 3$ خواهیم داشت:

$$\left| \int_\Omega y^3 \varphi \, dx \right| \underset{\text{هولدر}}{\le} \|y^3\|_{L^{p/3}} \cdot \|\varphi\|_{L^q} \qquad \frac{3}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\le C \|y\|_{L^p}^3 \cdot \|\varphi\|_{L^2}$$

به شرط آنکه $q \le 2$ (یا به طور معادل $p \ge 6$)

چون در این حالت $6 < 2^*$ است، پس می‌توان چنین $p$ را انتخاب کرد.

درنتیجه در هر حالت $y^3 \in H^{-1}(\Omega)$ و تابع $G(y,u)$ خوش تعریف است.

تعریف جواب ضعیف (۱): $y \in H_0^1(\Omega)$ : جواب ضعیف (۱) است هرگاه $G(y,u)=0$ در $H^{-1}(\Omega)$.

<u>قضیه تابع ضمنی</u> : $X, Y, Z$ سه فضای برداری باناخ باشند و $G: X \times Y \longrightarrow Z$ یک نگاشت $C^k$ باشد و $G(x_0,y_0)=0$. به علاوه $\partial_x G(x_0,y_0): X \longrightarrow Z$ وارون پیوسته داشته باشد (کافی است یک به یک و پوشا باشد) آنگاه همسایگی $U$ از $y_0$ در $Y$ و نگاشت $g: U \longrightarrow X$ وجود دارد که $C^k$ است و

$$G(g(y),y)=0 \qquad \forall y \in U$$

$$g(y_0)=x_0$$

$$Dg(y) = -\left(\partial_x G(g(y),y)\right)^{-1}\left(\partial_y G(g(y),y)\right)$$

برای استفاده از قضیه تابع ضمنی باید مشتق‌پذیری $G(y,u)$ در (2) را بررسی کنیم. با توجه به جملات فرض که در تعریف $G$

وجود دارد تنها مشتق‌پذیری $y \longmapsto y^3$ باید بررسی شود. فرض کنید $\Phi : H_0^1 \longrightarrow H^{-1}$ با ضابطه

$$\Phi(y) = y^3$$

مشتق‌پذیر باشد و $\Phi'(\bar{y})z = 3\bar{y}^2 . z$ . در این صورت

$$\langle \partial_y G(\bar{y},\bar{u}) , z\rangle = -\Delta z + c_0 z + 3\bar{y}^2 z$$

$$\partial_y G : H_0^1 \longrightarrow H^{-1}$$

وارون‌پذیری $\partial_y G$ (یا یک به یک و پوشا بودن آن) معادل است با اینکه برای هر $f \in H^{-1}$ ، معادله دیفرانسیل زیر جواب یکتا دارد:

$$\begin{cases} -\Delta z + c_0 z + 3\bar{y}^2 z = f & \text{in } \Omega \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

این PDE یک معادله خطی است و می‌دانیم که هرگاه $c_0(x) + 3\bar{y}^2(x) \geq 0$ در $\Omega$ ، این اتفاق می‌افتد.

## عملگر نمیتسکی — Nemytskii

$$\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi : y \longmapsto \varphi(x, y(x))$$

سؤال: نگاشت $\Phi$ بین چه فضاهای تابعی خوش‌تعریف و اصلاً پیوسته یا مشتق‌پذیر است؟

مثلاً اگر $\varphi$ یک تابع کراندار باشد، به‌وضوح $\Phi : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ خوش‌تعریف است. همچنین اگر $\varphi$ در نامساوی زیر صدق کند

$$|\varphi(x,y)| \leq a(x) + b(x)\,|y| \qquad a, b \in L^\infty(\Omega)$$

تعریف — $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ کاراتئودوری گوییم هرگاه برای هر $y \in \mathbb{R}$ ثابت، نسبت به متغیر $x$ اندازه‌پذیر باشد و برای تقریباً هر $x \in \Omega$ نسبت به $y$ پیوسته باشد.

تابع $\varphi$ دارای شرط کرانداری است اگر ثابت $K > 0$ وجود داشته باشد که $|\varphi(x, 0)| \leq K$ برای تقریباً هر $x \in \Omega$

همچنین $\varphi$ را نسبت به متغیر $y$ به طور موضعی لیپشیتز گوییم هرگاه برای هر ثابت $0<M$ ، ثابت لیپشیتز $L(M)$ وجود داشته باشد که

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x,z)| \le L(M)\,|y-z| \qquad \forall\, y,z\in[-M,M]$$

و برای تقریباً هر $x\in\Omega$.

مثال- هر تابع به صورت $\varphi(x,y)=a(x)+b(x)h(y)$ که $a,b\in L^\infty(\Omega)$ و $h\in C^1(\mathbb{R})$ هر سه خاصیت بالا را دارد.

قضیه- فرض کنید $\varphi:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ کاراتئودوری بوده و در شرط کران‌داری صدق کند. همچنین نسبت به متغیر $y$ به طور موضعی لیپشیتز باشد، آنگاه عملگر نمستکی $\Phi(y)=\varphi(\cdot,y(\cdot))$ روی $L^\infty(\Omega)$ خوش‌تعریف و پیوسته است.

اثبات- اگر $y\in L^\infty(\Omega)$ قرار دهید $M=\|y\|_\infty$ و $L(M)$ را ضریب لیپشیتز متناظر $M$ در نظر بگیرید:

$$|\varphi(x,y(x))| \le |\varphi(x,y(x))-\varphi(x,0)| + |\varphi(x,0)|$$

$$\le L(M)\cdot|y(x)| + K \le M\cdot L(M)+K \qquad a.e.\ x\in\Omega$$

برای پیوستگی $\Phi : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ نامساوی زیر را اثبات می‌کنیم:

$$(3) \qquad \|\Phi(y)-\Phi(z)\|_{L^\infty} \leq L(m)\, \|y-z\|_{L^\infty} \quad \text{if} \quad \|y\|_\infty, \|z\|_\infty \leq m$$

که نتیجه بدیهی به طور موضعی لیپ‌شیتز بودن $\varphi(x,y)$ است.

نکته- قضیه قبل برای $\Phi : L^p \to L^p$ درست نیست. به عنوان مثال $\Phi(y)=y^3$ برای اینکه $\Phi(y)\in L^p$ باشد باید $y\in L^{3p}$ که لزوماً برای هر $y\in L^p$ برقرار نیست. هرچند در شرایط قضیه قبل نامساوی (3) در فضای $L^p$ به صورت زیر برقرار است

$$(4) \qquad \|\Phi(y)-\Phi(z)\|_{L^p} \leq L(m)\, \|y-z\|_{L^p} \quad \text{if} \quad \|y\|_\infty, \|z\|_\infty \leq m$$

اگر علاوه $\varphi$ به طور سرتاسری نسبت به $y$ لیپ‌شیتز باشد، یعنی $|\varphi(x,y)-\varphi(x,z)| \leq L|y-z|$ برای هر $y,z\in\mathbb{R}$، آنگاه $\Phi : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ خوش‌تعریف است و (4) برقرار است. به عنوان مثال $\varphi(y)=\sin y$ این ویژگی را دارد.

## مشتق‌پذیری عملگر نمتسکی :

برای مشتق گاتو باید بررسی کنیم که آیا حد

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(y+th)-\Phi(y)}{t}$$

در $L^\infty(\Omega)$ وجود دارد ؟ اگر حد آن در $L^\infty(\Omega)$ را تابع $z$ بگیریم، باید

$$\frac{1}{t}\| \Phi(y+th)-\Phi(y)-tz\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{t}\left| \varphi(x,y(x)+th(x))-\varphi(x,y(x))-t\,z(x)\right| \longrightarrow 0 \qquad a.e.\ x\in\Omega$$

اگر $\varphi$ نسبت به $y$ مشتق‌پذیر باشد، باید برای تقریباً هر $x\in\Omega$ ثابت، داشته باشیم :

$$z(x)=\partial_y \varphi(x,y(x))\,h(x)$$

کاندیدِ مشتقِ فرشه :

$$D\Phi(\bar y) = A : L^\infty \longrightarrow L^\infty$$

$$h \longmapsto \partial_y \varphi(\cdot, \bar y(\cdot))\, h(\cdot)$$

برای مشتق‌پذیریِ فرشه باید نشان دهیم :

$$\| \Phi(\bar y + h) - \Phi(\bar y) - D\Phi(\bar y)\cdot h \|_{L^\infty} = o(\|h\|_\infty)$$

در اینِ صورت $D\Phi(\bar y) = \partial_y \varphi(\cdot, \bar y(\cdot))$ که خودش یک عملگرِ نمیتسکی است . برای اینکه این عملگرِ نمیتسکی خوش‌تعریف باشد باید $\partial_y \varphi$ در شرایطِ قبل صدق کند .

قضیه- فرض کنید $\varphi$ کاراتئودوری باشد که برای تقریباً هر $x\in\Omega$، نسبت به $y$ مشتق‌پذیر است و در شرط کران‌داری صدق می‌کند. به‌علاوه $\partial_y \varphi$ در شرط کران‌داری و موضعاً لیپ‌شیتز صدق می‌کند. یعنی

$$|\partial_y \varphi(x,0)| \le K \qquad a.e.\ x\in\Omega$$

$$|\partial_y \varphi(x,y) - \partial_y \varphi(x,z)| \le L(m)\,|y-z| \qquad \forall\, y,z\in[-m,m]$$

آنگاه عملگر $\Phi: L^\infty(\Omega)\longrightarrow L^\infty(\Omega)$ به معنای فرشه مشتق‌پذیر است و

$$\langle \Phi'(\bar{y}), h\rangle = \partial_y \varphi(x,\bar{y}(x))\, h(x)$$

نکته- اگر $\varphi\in C^2$ باشد، آنگاه هم شرایط قضیه بالا برقرار است.

نکته- تحت شرایط قضیه قبل، مشتق $\Phi$ پیوسته است. یعنی $\Phi': L^\infty(\Omega)\longrightarrow \mathcal{L}(L^\infty(\Omega),L^\infty(\Omega))$ پیوسته است.

که تنها کافی است $\bar{y}\longmapsto \partial_y\varphi(\cdot,\bar{y}(\cdot))$ روی $L^\infty$ پیوسته باشد.

مثال- $y \mapsto \sin y$ روی فضای $L^p(0,1)$ فوق تولید و پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

اگر این نگاشت مشتق‌پذیر (فرشه) باشد باید $\langle \Phi'(y), h\rangle = \cos y \, . \, h$

پس برای $y=0$ باید

$$\| \underbrace{\sin(0+h(x)) - \sin(0) - h(x)}\|_{L^p} = o(\|h\|_p)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \sin(th)\, dt - h = \int_0^1 (\cos(th) - 1)\, h\, dt$$

قرار دهید $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } [0,\varepsilon] \\ 0 & \text{in } (\varepsilon, 1] \end{cases} \Leftarrow \|h\|_p = \varepsilon^{1/p}$

$$0 \le x \le \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 (\cos(th) - 1) h\, dt = \int_0^1 (\cos t - 1)\, dt = -\sin t - t \Big|_0^1 = -1 - \sin 1$$

$$\|\sin h - h\|_{L^p} = \varepsilon^{1/p} |1 + \sin 1| \Rightarrow \frac{\|\sin h - h\|_p}{\|h\|_p} = 1 + \sin 1 \not\to 0$$

تمرین: ثابت کنید $y \mapsto \sin y$ از $L^p(0,1)$ به $L^q(0,1)$ مشتق‌پذیر (فرشه)

است اگر $q<p$.