کنترل بهینه

جلسه بیستم ۹۹/۹/۱۰

معادلات سهموی :

$$
(1)\quad \begin{cases} y_t - \Delta y = f & \text{in} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ \partial_n y + \alpha y = g & \text{on} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}
$$

برای اینکه جواب ضعیف (1) را تعریف کنیم معادله را در تابع هموار $\varphi \in C^\infty(Q)$ ضرب می‌کنیم.

$$
\int_Q f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt = \int_Q y_t \varphi + \nabla y \cdot \nabla \varphi \,dx\,dt - \int_\Sigma \underbrace{\partial_n y}_{g-\alpha y} \cdot \varphi \,d\sigma\,dt
$$

$$
\int_Q f\varphi\,dx\,dt + \int_\Sigma g\varphi\,d\sigma\,dt = \int_Q y_t\varphi + \nabla y \cdot \nabla\varphi\,dx\,dt + \int_\Sigma \alpha y \varphi\,d\sigma\,dt \qquad (2)
$$

برای اینکه انتگرال‌های سمت راست معنا داشته باشند، حداقل باید $y(\cdot,t) \in H^1(\Omega)$ برای تقریباً هر $0 \leq t \leq T$.

با این حال معنی جمله $\int y_t \varphi \,dx\,dt$ باید تعبیر شود. کمترین نظمی که برای y می‌توان در نظر گرفت که این انتگرال معنی بدهد، $y_t \in (H^1(\Omega))'$ است.

جدای از اینها باید کلاس y به نحو مناسبی انتخاب شود که تساوی $y(\cdot,0)=y_0(\cdot)$ معنا داشته باشد.

تعریف- فرض کنید X یک فضای برداری باناخ باشد.

$$C(a,b;X)=\{\, y:[a,b]\longrightarrow X \;:\; \text{پیوسته است } y \,\}$$

$$\|y\|_{C(a,b;X)}=\max_{t\in[a,b]}\|y(t)\|_X$$

$$L^p(a,b;X)=\left\{\, y:[a,b]\longrightarrow X \;:\; \int_a^b \|y(t)\|_X^p\,dt<\infty \,\right\}$$

به طور ضمنی فرض می‌کنیم تابع $t\longmapsto \|y(t)\|_X^p$ انتگرال‌پذیر است. اعضای $L^p(a,b;X)$ در کلاسهای هم‌ارزی در هر یک مجموعه اندازه صفر یکی هستند.

این فضاها را فضای Bochner می‌نامیم و عموماً برای $X=L^q(\Omega)$ یا $X=H^1(\Omega)$ استفاده می‌کنیم.

$$W(0,T) = \{ y \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \;:\; \partial_t y \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))') \}$$

$$\|y\|_{W(0,T)} = \left[\int_0^T \|y(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\partial_t y\|^2_{(H^1(\Omega))'} \, dt \right]^{1/2}$$

در رابطه بالا منظور از $\partial_t y$ مشتق ضعیف است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\int_0^T \langle \partial_t y , \varphi \rangle_{(H^1)',H^1} \, dt = - \int_0^T \langle y , \partial_t \varphi \rangle_{L^2 \times L^2} \, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^1(0,T;H^1(\Omega))$$

قضیه: نشاندن پیوسته $W(0,T) \hookrightarrow C(0,T;L^2(\Omega))$ برقرار است. به علاوه اگر $y,z \in W(0,T)$ آنگاه

$$\int_0^T \langle \partial_t y , z \rangle_{(H^1)',H^1} \, dt = - \int_0^T \langle \partial_t z , y \rangle_{(H^1)',H^1} \, dt + (y(T),z(T))_{L^2} - (y(0),z(0))_{L^2}$$

تعریف جواب ضعیف (1) : تابع $y\in W(0,T)$ جواب ضعیف گوییم هرگاه $y(0)=y_0$ در $L^2(\Omega)$ برقرار باشد و برای هر $\varphi\in W(0,T)$ رابطه (2) برقرار باشد.

قضیه- اگر $g\in L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$ و $f\in (W(0,T))'$ ، آنگاه (1) دارای جواب ضعیف یکتای $y\in W(0,T)$ است که

$$\|y\|_W \le C\left(\|f\|_{W'} + \|g\|_{L^2(0,T;H^{-1/2})} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

که ثابت C تنها به Ω ، α و T وابسته است.

نتیجه- نگاشته‌های خطی پیوسته $G_Q: W'\to W$ ، $G_\Sigma: L^2(0,T;H^{-1/2})\to W$ و $G_0: L^2(\Omega)\to W$ وجود دارند که

$$y = G_Q(f) + G_\Sigma(g) + G_0(y_0)$$

جواب (1) است.

مسأله کنترل مرزی :

$$\beta \in L^\infty(\Sigma),\ u \in U_{ad} \subseteq L^2(\Sigma) \qquad (3)\begin{cases} y_t - \Delta y = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u & \text{on } \Sigma \\ y(x,0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x,T) - y_\Omega(x)|^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\iint_\Sigma |u(x,t)|^2\, d\sigma\, dt$$

نکته - چون $y \in W \subseteq C([0,T]; L^2(\Omega))$ پس انتگرال تابع هزینه معنی دارد.

نگاشت $u \mapsto G_\Sigma(\beta u) \in W$ نگاشت کنترل - حالت است.

$$J : L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

اگر $E_T : W \longrightarrow L^2(\Omega)$ با ضابطه $E_T y = y(\cdot,T)$ را درنظر بگیریم، آنگاه باید تابع زیر را بهینه کنیم:

$$f(u) = J(E_T G_\Sigma(\beta u), u), \qquad Su = E_T \circ G_\Sigma(\beta u)$$

$$f : L^2(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad J : L^2(\Omega) \times L^2(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle f'(u), v \rangle_{L^2(\Sigma)} = \langle \partial_y J , Sv \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_u J , v \rangle_{L^2(\Sigma)}$$

$$= \langle S^* \partial_y J + \partial_u J , v \rangle_{L^2(\Sigma)}$$

محاسبه S^* :

$$S : L^2(\Sigma) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$S^* : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Sigma)$$

$$(S^* z , v)_{L^2(\Sigma)} = (z , Sv)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega z \cdot Sv \, dx$$

اگر $y = G_\Sigma(\beta v)$ که $y(\cdot,T) = Sv$. همچنین $p \in W$ بگیرید که $p(\cdot,T) = z$.

$$(S^* z , v)_{L^2(\Sigma)} = \int_\Omega p(x,T)\, y(x,T)\, dx = \int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega p(x,t)\, y(x,t)\, dx\, dt$$

دقت کنید y جواب (3) است و $y(x,0)=0$.

$$= \int_0^T \int_\Omega p_t y + p y_t \, dx\, dt = \underbrace{\int_0^T \int_\Omega p_t y - \nabla y \cdot \nabla p \, dx\, dt + \int_\Sigma -\alpha y p + v \beta p \, d\sigma\, dt}_{\text{اگر این مقدار برابر صفر باشد آنگاه}}$$

تعریف جواب ضعیف (3)

$$\Rightarrow \quad (S^* z, v)_{L^2(\Sigma)} = \int_\Sigma v \beta p \, d\sigma\, dt \quad \Rightarrow \quad S^* z = \beta p(x,t)$$

که p جواب ضعیف مسأله زیر است :

$$\begin{cases} -p_t - \Delta p = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n p + \alpha p = 0 & \text{on } \Sigma \\ p(x,T) = z(x) & \text{in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

جمع‌بندی: $\nabla f(u) = \lambda u + \beta p$ که p جواب ضعیف مسأله الحاقی زیر است:

$$(4)\begin{cases} -\partial_t p - \Delta p = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n p + \alpha p = 0 & \text{on } \Sigma \\ p(x,T) = y(x,T) - y_\Omega(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

و شرط بهینگی

$$(5) \qquad \forall u \in U_{ad} \qquad (\nabla f, u - \bar{u}) \geq 0$$

روش لاگرانژین: در ابتدا معادلات حالت را به صورت $Ay = Bu$ بیان می‌کنیم.

جواب ضعیف (3) به معنای تساوی زیر است:

$$\int_Q y_t\varphi + \nabla y\cdot\nabla\varphi \, dx\,dt - \int_\Sigma \alpha y \varphi \, d\sigma\,dt = \int_\Sigma \beta u \varphi \, d\sigma\,dt$$

برای هر $y \in W$ رابطه سمت چپ یک تابعک خطی پیوسته روی $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ تعریف می‌کند.

اگر $Y \subseteq W$ زیرفضایی باشد که $y(x,0)=0$ برای هر $y\in Y$، آنگاه

$$A : Y \longrightarrow W'$$

$$B : L^2(\Sigma) \longrightarrow W'$$

$$L(y,u,p) : Y \times U_{ad} \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle p, Ay - Bu \rangle$$

$$\begin{cases} \partial_p L = 0 \longrightarrow \text{(3) مسأله} \\ \partial_y L = 0 \longrightarrow \text{(4) مسأله} \end{cases}$$

$$(\partial_u L, u - \bar{u}) \geq 0 \longrightarrow \text{(5) رابطه}$$

$$\min J(y,u)$$

راه‌حل دیگر: به مسأله حالت (3) به عنوان دو یا سه قید در مسأله بهینه‌سازی نگاه کنید و لاگرانژین بصورت زیر تعریف کنید:

$$L(y,u,P_1,P_2,P_3) = J(y,u) - \langle P_1 , y_t - \Delta y \rangle_{W',W} - \langle P_2 , \partial_n y + \alpha y - \beta u \rangle - \langle P_3 , y(\cdot,0) \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$L^2(0,T;H^{1/2}) , L^2(0,T;H^{-1/2})$

$$\partial_y L = 0 \Rightarrow \langle \partial_y J , z \rangle = \langle P_1 , z_t - \Delta z \rangle + \langle P_2 , \partial_n z + \alpha z \rangle + \langle P_3 , z(\cdot,0) \rangle$$

$$= \int_Q -\partial_t P_1 \cdot z + \nabla P_1 \cdot \nabla z \, dx\, dt - \int_\Sigma \partial_n z \cdot P_1 \, d\sigma\, dt + \int_\Sigma (\partial_n z + \alpha z) P_2 \, d\sigma\, dt$$

$$+ \int_\Omega P_3(x)\, z(x,0)\, dx + \int_\Omega P_1(x,T)\, z(x,T) - P_1(x,0)\, z(x,0)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = P_2 \text{ on } \Sigma , \quad \begin{cases} -\partial_t P_1 - \Delta P_1 = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n P_1 + \alpha P_1 = 0 & \text{on } \Sigma \end{cases}$$

$$P_1(x,0) = P_3(x) , \quad P_1(x,T) = \partial_y J = y(x,T) - y_\Omega(x)$$

مسأله ناهمگن کنترل درونی :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = \beta u & \text{in } Q \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big|\underbrace{y(x,T)}_{E_T y} - y_\Omega(x)\big|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Sigma \big|\underbrace{y(x,t)}_{E_\Sigma y} - y_\Sigma(x,t)\big|^2 dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\int_Q |u|^2 dx\,dt$$

$$y = G_Q(\beta u) + G_0(y_0) \quad , \quad E_\Sigma : W \longrightarrow L^2(\Sigma)$$

$$E_\Sigma(y) = y\big|_\Sigma$$

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle p, y_t - \Delta y - \beta u \rangle - \langle p, \partial_n y \rangle - \langle p, y(\cdot,0) - y_0 \rangle$$

$$\partial_y L = 0 \Rightarrow \langle \partial_y J, z \rangle = \langle p, z_t - \Delta z \rangle - \langle p, \partial_n z \rangle - \langle p, z(\cdot,0) \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\partial_t p - \Delta p = 0 & \text{in } Q \\ \partial_n p = y - y_\Sigma & \text{on } \Sigma \\ p(\cdot,T) = y(\cdot,T) - y_\Omega & \text{in } \Omega \end{cases}$$

$$\nabla f = \lambda u + \beta p$$