کنترل بهینه

جلسه نوزده ۹۹,۹,۸

روشهای عددی

روش گرادیان شرطی: اگر $f: U_{ad} \xrightarrow{\text{مشتق‌پذیر}} \mathbb{R}$ که $U_{ad} \subseteq V$ کران‌دار، محدب و بسته

اگر بخواهیم

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u)$$

دنباله بازگشتی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

گام اول (پیدا کردن یک راستای کاهشی):

مسئله بهینه‌سازی خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$f'(u_n)\, v_n = \min_{v \in U_{ad}} f'(u_n)\, v$$

در حقیقت $v_n - u_n$ یک راستای کاهشی برای تابع f در نقطه u_n است.

$$f'(u_n)\, v_n \leq f'(u_n)\, u_n \Rightarrow f'(u_n)(v_n - u_n) \leq 0$$

شروطی که روی v_n گذاشتیم، تضمین می‌کند که مسأله فوق جواب داشته باشد.

گام دوم (جستجوی روی خط): روی خط $u_n + s(v_n - u_n)$ حرکت می‌کنیم و کمترین مقدار f را پیدا می‌کنیم.

$$\min_{0<s} f(u_n + s(v_n - u_n))$$

یک روش حل این مسأله روش دونیمی است که با قرار دادن s_0، $\frac{s_0}{2}$، $\frac{s_0}{4}$، … به جای s می‌نیمم را مشخص می‌کنیم.

کاربرد در حل مسأله کنترل بهینه :

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2}$$

اگر $G : U_{ad} \longrightarrow H^1_0(\Omega)$ نگاشت کنترل - حالت باشد ، $y = G(u)$

$$f(u) = J(G(u), u)$$

در این صورت مشتق f برابر است با

$$\nabla f(u) = \lambda u + \beta p$$

که p جواب مسأله الحاقی است :

$$(2)\quad \begin{cases} -\Delta p = y - y_d & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

گام اول : با دانستن u_n و حل (1) تابع y_n را پیدا می‌کنیم.

گام دوم: به کمک y_n و حل (2) تابع p_n را پیدا می‌کنیم.

گام سوم: مسئله بهینه سازی خطی

$$\min_{v \in U_{ad}} \int_\Omega (\beta p_n + \lambda u_n) v \, dx$$

را حل می‌کنیم.

گام چهارم: اگر v_n جواب گام سوم باشد، با روش‌های جستجوی خطی مسئله زیر را حل کنیم:

$$\min f(u_n + s(v_n - u_n))$$

نکته - اگر $U_{ad}=\{u:\ u_a\le u\le u_b\}$ ، جواب گام سوم را می‌توان به صورت صریح به دست آورد:

$$
v_n(x)=\begin{cases} u_a(x) & \beta p_n(x)+\lambda u_n(x)>0 \\ \frac{1}{2}\left(u_a(x)+u_b(x)\right) & \beta p_n(x)+\lambda u_n(x)=0 \\ u_b(x) & \beta p_n(x)+\lambda u_n(x)<0 \end{cases}
$$

نکته - برای تابع هزینه $J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_\Omega\|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2$ ، نتیجه گام چهارم به صورت صریح محاسبه می‌شود:

$$f(u_n+s(v_n-u_n))=J\left(G(u_n+s(v_n-u_n)),\ u_n+s(v_n-u_n)\right)$$

$$=J\left(G(u_n)+s\,G(v_n-u_n),\ u_n+s(v_n-u_n)\right)$$

$$y_n=G(u_n),\quad z_n=G(v_n)\ \Rightarrow f(u_n+s(v_n-u_n))=\frac{1}{2}\|y_n+s(z_n-y_n)-y_\Omega\|^2+\frac{\lambda}{2}\|u_n+s(v_n-$$

$$=\frac{1}{2}\|y_n-y_\Omega\|^2+\frac{s^2}{2}\|z_n-y_n\|^2+s\left(y_n-y_\Omega,\ z_n-y_n\right)_{L^2}+$$

که یک عبارت درجهٔ ۲ برحسب s است و مینیمم آن به راحتی برحسب u_n و v_n قابل محاسبه است.

(دقت کنید در این گام احتیاج است دوباره مسئله (۱) برای $u = v_n$ حل شود.)

روش گرادیان تصویر شده

با گام‌های اول و دوم مشابه قبل گرادیان تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$\nabla f(u_n) = \beta p_n + \lambda u_n$$

درنتیجه $v_n = -\nabla f(u_n) = -(\beta p_n + \lambda u_n)$ یک راستای کاهشی برای f در نقطهٔ u_n است.

$$\min_{s>0} f\left(\mathrm{Proj}_{U_{ad}}(u_n + s v_n)\right)$$

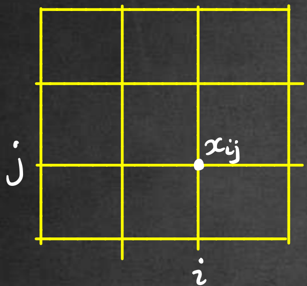
اگر s_n جواب مسئلهٔ بالا باشد، قرار دهید:

$$u_{n+1} = \mathrm{Proj}_{U_{ad}}(u_n + s_n v_n)$$

گسسته سازی :

اگر $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ ،

$i,j = 1, \dots, n$ ، $\Omega_{ij} = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \times \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ ، $\Omega = \bigcup_{i,j} \Omega_{ij}$



$$x_{ij} = \begin{bmatrix} i/n \\ j/n \end{bmatrix} \quad , \quad h = 1/n$$

اگر معادله (1) را گسسته کنیم، خواهیم داشت : $-\Delta y = \beta u$

$$-\Delta y(x_{ij}) = \frac{4y_{ij} - [y_{i-1,j} + y_{i,j-1} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1}]}{h^2}$$

که برای $y_{ij} = y(x_{ij})$ ، $i,j = 0$ یا n به دلیل شرط مرزی برابر صفر است و در بقیه نقاط مجهول است.

$$\Rightarrow \quad -\Delta y(x_{ij}) = \beta_{ij} u_{ij}$$

$\beta_{ij} = \beta(x_{ij})$

$u_{ij} = u(x_{ij})$

$$\Rightarrow \quad A_h \vec{y} = B_h \vec{u}$$

$$\vec{y} = \left(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{(n-1),(n-1)}\right)^T$$

که تمام y_{ij} های مجهول

$$\vec{u} = \left(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{(n-1),(n-1)}\right)^T$$

همچنین تابع هزینه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1 \le i,j \le n-1} |y_{ij} - y_{\Omega,ij}|^2 + \lambda |u_{ij}|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{y} - \vec{y}_\Omega\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\|\vec{u}\|_2^2$$

بنابراین باید مسأله بهینه‌سازی زیر را حل کنیم :

$$\begin{cases} \min J(\vec{y}, \vec{u}) \\ A_h \vec{y} = B_h \vec{u} \\ \vec{u}_a \le \vec{u} \le \vec{u}_b \end{cases}$$

استراتژی مجموعه فعال اولیه - دوگان (primal-dual)

با کمک به خاصیت قبلی روی تصویر کنترل بهینه در شرط لازم

$$u = \mathbb{P}_{U_{ad}}\left(-\frac{\beta}{\lambda}p\right)$$

صدق می‌کند که p جواب مسئله الحاقی (2) است. در حالتیکه $U_{ad}=\{u_a\le u\le u_b\}$ ، نتیجه می‌دهد:

$$\mu = -(\lambda^{-1}\beta p + u)$$

$$u(x) = u_a(x) \iff \mu(x) < 0$$

$$u(x) = u_b(x) \iff \mu(x) > 0$$

$$u(x) = -\lambda^{-1}\beta p(x) \iff \mu(x) = 0$$

در این روش با دو تابع دلخواه $u_0 , \mu_0 \in L^2$ شروع می‌کنیم. لزومی ندارد حتی $u_0 \in U_{ad}$.

فرض کنید u_{n-1} و μ_{n-1} را می‌شناسیم:

<u>گام اول</u>: مجموعه فعال را به صورت زیر شناسایی می‌کنیم:

$$A_n^a = \{ x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x) \}$$

$$A_n^b = \{ x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x) \}$$

$$I_n = \Omega \setminus A_n^a \cup A_n^b$$

<u>گام دوم</u>: مسئله (1) و (2) را همزمان حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\Delta y_n = u_n & \text{in } \Omega \\ -\Delta p_n = y_n - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ u_n = \begin{cases} u_a & \text{in } A_n^a \\ -\lambda^{-1} \beta p_n & \text{in } I_n \\ u_b & \text{in } A_n^b \end{cases} \end{cases}$$

با پیدا کردن u_n از گام دوم، قرار می‌دهیم

$$\mu_n = -(\lambda^{-1}\beta p_n + u_n)$$

شرط توقف الگوریتم این است که مجموعه‌های فعال A_n^a و A_n^b تغییر نکند.

نکته - با روش گسسته‌سازی که توضیح داده شد، بردار $\vec{u}_n$ آن درایه‌هایی که در A_n^a و A_n^b قرار دارند معلوم است و بقیه درایه‌ها از حل دستگاه خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A_h \vec{y} = B_h \vec{u} \\ A_h \vec{p} = \vec{y} - \vec{y}_\Omega \\ u_{ij} = -\lambda^{-1}\beta_{ij}\, p_{ij} \qquad (i,j) \in I_n \end{cases}$$

روش اجزاء متناهی

فرض کنید $\{\phi_1,\dots,\phi_\ell\}$ پایه‌ای از یک زیرفضای بعد ℓ در $H_0^1(\Omega)$

$\{e_1,\dots,e_m\}$ 〃 〃 〃 m 〃 در $L^2(\Omega)$

$$y(x)=\sum_{i=1}^{\ell} y_i\,\Phi_i(x)\quad,\quad u(x)=\sum_{i=1}^{m} u_i\,e_i(x)$$

$$-\Delta y=\beta u \;\Rightarrow\; \int_\Omega \nabla y\cdot\nabla z\,dx=\int_\Omega \beta u z\,dx \qquad \forall z\in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sum y_i\,\nabla\Phi_i\cdot\nabla\Phi_j\,dx=\int\sum_i u_i\,\beta e_i\,\Phi_j(x)\,dx$$

$$\forall\; 1\le j\le \ell$$

$$\Rightarrow \quad K\vec{y}=B\vec{u}$$

$$K_{ij}=\int_\Omega \nabla\Phi_i\cdot\nabla\Phi_j\,dx\quad,\quad B_{ij}=\int_\Omega \beta\,e_i(x)\,\Phi_j(x)\,dx$$

تابع هزینه هم بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2}$$

$$= \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y_\Omega\|^2 - (y, y_\Omega)_{L^2} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{y}^T M \vec{y} + \frac{1}{2}\|y_\Omega\|^2 - \vec{a}^T\vec{y} + \frac{\lambda}{2}\vec{u}^T D \vec{u}$$

$$M_{ij} = \int_\Omega \Phi_i \Phi_j \, dx \quad , \quad \vec{a}_i = \int_\Omega y_\Omega \Phi_i(x) \, dx \quad , \quad D_{ij} = \int_\Omega e_i e_j \, dx$$

$$\begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}\vec{y}^T M \vec{y} - \vec{a}^T\vec{y} + \frac{\lambda}{2}\vec{u}^T D \vec{u}\right\} \\ K\vec{y} = B\vec{u} \\ \vec{u}_a \le \vec{u} \le \vec{u}_b \end{cases}$$

می‌دانیم جواب مسأله‌ی گسسته شده در شرط لازم زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} K\vec{y} = B\vec{u} \\ K\vec{p} = M\vec{y} - \vec{a} \\ \left(\lambda D\vec{u} + B^T p\right)^T (\vec{v} - \vec{u}) \geq 0 \end{cases} \qquad \forall\ \vec{u}_a \leq \vec{v} \leq \vec{u}_b$$

$$\vec{\mu} = -\left[(-\lambda D)^{-1} B\vec{p} + \vec{u}\right]$$

$$u_i = \begin{cases} u_{a,i} & u_i + \mu_i < u_{a,i} \\ \\ u_{b,i} & u_i + \mu_i > u_{b,i} \end{cases}$$

اگر با $\vec{\mu}^0$ و $\vec{u}^0$ شروع کنیم و از روی $\vec{\mu}^{n-1}$ و $\vec{u}^{n-1}$ مجموعه‌ی فعال را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A_n^a = \{ i : u_i^{n-1} + \mu_i^{n-1} < u_{a,i} \}$$

$$A_n^b = \{ i : u_i^{n-1} + \mu_i^{n-1} > u_{b,i} \} , \quad I_n = \{1, \dots, m\} \setminus A_n^a \cup A_n^b$$

ماتریس‌های قطری X_n^a و X_n^b به عنوان توابع مشخصه مجموعه‌های فعال A_n^a و A_n^b در نظر بگیرید:

$$X^a_{n,ii} = \begin{cases} 1 & i \in A_n^a \\ 0 & i \notin A_n^a \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & K & -B \\ K & -M & 0 \\ EB^T & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_n \\ \vec{y}_n \\ \vec{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{a} \\ X_n^a \vec{u}_a + X_n^b \vec{u}_b \end{bmatrix}$$

که $E = (\lambda D)^{-1}(I - X_n^a - X_n^b)$ که در واقع حل گسسته دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta y_n = \beta u_n & \text{in } \Omega \\ -\Delta p_n = y_n - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ u_n = -\lambda^{-1}\beta p_n & \text{in } I_n \end{cases}$$