کنترل بهینه

جلسه هجده ۹۹/۹/۳

مسأله کنترل مرزی

$$\beta \in L^\infty(\partial\Omega) \quad \begin{cases} -\Delta y = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = \beta u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_\Gamma}{2}\|y - y_\Gamma\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\partial\Omega) : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x)\}$$

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n y \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} (\beta u - \alpha y)\varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y \varphi \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \beta u \varphi \, d\sigma \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

$$A : H^1(\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)'$$

$$\langle Ay, \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y \varphi \, d\sigma$$

$$B : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)'$$

$$\langle Bu, \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \int_{\partial\Omega} \beta u \varphi \, d\sigma$$

معادله حالت $\Rightarrow \quad Ay = Bu \quad \text{in } (H^1)'$

$$A^* : H^1(\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)'$$

$$\langle A^* p, \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \langle A\varphi, p \rangle_{(H^1)', H^1}$$

$$\langle A^* p, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha p \varphi \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \quad A = A^*$$

شرط لازم بهینگی : $\quad A^* p = \partial_y J$

$$J : H^1(\Omega) \times L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \partial_y J, \varphi \rangle = \langle A^* p, \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha p \varphi \, d\sigma$$

$$\langle \partial_y J, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (y - y_{\Omega}) \varphi \, dx + \lambda_p \int_{\partial\Omega} (y - y_p) \varphi \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta p = y - y_{\Omega} & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = \lambda_p (y - y_p) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

روش لاگرانژین :

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle \partial_n y + \alpha y - \beta u \, , \, p \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$$

$$= J(y,u) - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla p \, dx - \int_{\partial\Omega} (\alpha y - \beta u) p \, d\sigma$$

$\partial_y L = 0 \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \Rightarrow \quad (2)$

$\partial_p L = 0 \quad \Rightarrow$ معادله حالت

$(\partial_u L \, , \, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad \Rightarrow \quad (\lambda u + \beta p \, , \, u - \bar{u})_{L^2} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$

نکته - در مثال‌های قبل، نگاشت کنترل-حالت $u \longmapsto y$ نگاشت خطی بود.

$$Ay - Bu = 0 \quad \Rightarrow \quad y = A^{-1}Bu$$

اگر نگاشت کنترل-حالت آفین باشد، همه مباحث قبل با تغییر جزیی قابل انجام است.

$$Ay - Bu = z_0 \quad \Rightarrow \quad y = A^{-1}Bu + A^{-1}z_0 = A^{-1}Bu + y_0$$

به‌عنوان مثال اگر رابطه کنترل و حالت در مسئله کنترل مرزی از حل PDE زیر به دست بیاید، یک نگاشت آفین داریم:

$$\begin{cases} -\Delta y = g & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = h + \beta u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر y_0 جواب مسئله ناهمگن زیر باشد $\begin{cases} -\Delta y_0 = g & \text{in } \Omega \\ \partial_n y_0 + \alpha y_0 = h & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ آنگاه هر جواب مسئله قبل به صورت

$y = z + y_0$ است که z در مسئله کنترل مرزی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -\Delta z = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_n z + \alpha z = \beta u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

تمرین - سیستم بهنگی

$$\begin{cases} \min J(y,u) \\ \text{Subject to } \quad Ay - Bu = z_0 \end{cases}$$

برای مقدار ثابت و مشخص $z_0 \in Z$

را بنویسید.

$$J : Y \times \mathcal{U} \to Z$$

$$A : Y \to Z \quad , \quad B : \mathcal{U} \to Z$$

ساختن نمونه های آزمایشی : جواب یک مسئله که توابع از پیش تعیین شده، جواب مسئله باشند.

با این توابع صحت و دقت روشهای عددی را بررسی می کنیم.

نمونه اول : $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. با تقسیم هر بازه $[0,1]$ به 8 قسمت مساوی، ناحیه Ω به 64 مربع کوچک تقسیم می شود. به دنبال طراحی یک مسئله هستیم که جواب کنترل بهینه آن تابع u باشد که در هر مربع کوچک مقدار آن $+1$ یا -1 باشد به صورت یک در میان.

اگر به دنبال طراحی یک مسئله کنترل درونی باشیم، می‌دانیم باید

که p پارامتر الحاقی است. $U_{ad} = \{ -1 \le u(x) \le 1 \}$

1	-1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	-1
-1	1	-1	1

$$u(x) = \begin{cases} -1 & p > 0 \\ 1 & p < 0 \end{cases}$$

فرض کردیم $\lambda = 0$ و $\beta = 1$

$$p(x) = \frac{-1}{128\pi^2} \sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2)$$

$$-\Delta p = y - y_\Omega \implies -\sin(8\pi x_1) \sin(8\pi x_2) = y - y_\Omega$$

$$y = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \implies$$ y_Ω از شرایط بالا به دست می‌آید.

$$-\Delta y = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) = u + e_\Omega$$

e_Ω با داشتن y و u به‌دست می‌آید. در نتیجه جواب مسئله کنترل بهینه زیر تابع u خواهد بود:

$$\begin{cases} -\Delta y = u + e_\Omega & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)}$$

نمونه دوم:

$$r = \left[(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2\right]^{1/2}, \quad \bar{u}(x) = \begin{cases} 1 & r > 1/3 \\ 12r^2 - 1/3 & 1/6 \le r \le 1/3 \\ 0 & r < 1/6 \end{cases}$$

$$U_{ad} = \{0 \le u \le 1\}$$

با فرض $\lambda = \beta = 1$ باید p را پیدا کنیم که

$$\bar{u} = \mathrm{Proj}_{U_{ad}}(-p)$$

$$p = -12r^2 + 1/3$$

اگر تابع هزینه به صورت $J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ معادله الحاقی باید به صورت زیر باشد

$$\begin{cases} -\Delta p = y - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n p = e_p & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

اگر $y \equiv 1$ قرار دهیم، y_Ω به راحتی به دست می‌آید.

$$\begin{cases} -\Delta y = u + e_\Omega & \text{in } \Omega \\ \partial_n y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

و e_Ω نیز از معادله بالا به دست می‌آید.