کنترل بهینه

جلسه هفدهم ۹۹/۹/۱

یادآوری :

$$u \in U_{ad} \quad , \beta \in L^{\infty}(\Omega) \qquad \begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_{\Omega}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$A : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \quad , \qquad Ay = -\Delta y$$

$$B : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \quad , \qquad Bu = \beta u$$

$$\begin{cases} \min \ J(y,u) \\ \text{Subject to} \quad Ay - Bu = 0 \end{cases}$$

شرط لازم :

معادله الحاقی $\leftarrow$ $A^*\bar{p} = \partial_y J \Rightarrow -\Delta\bar{p} = \bar{y} - y_{\Omega}, \quad \bar{p} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega$

معادله حالت $\leftarrow$ $A\bar{y} = B\bar{u} \Rightarrow -\Delta\bar{y} = \beta\bar{u}, \quad \bar{y} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega$

$B^*\bar{p} + \partial_u J \in (FC(\bar{u}))^* \Rightarrow (\beta\bar{p} + \lambda\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$

نامساوی تغییراتی

(2) $$\bar{u}(x)=\begin{cases} u_a(x) & \lambda\bar{u}+\beta p>0 \\ u_b(x) & \lambda\bar{u}+\beta p<0 \end{cases}$$

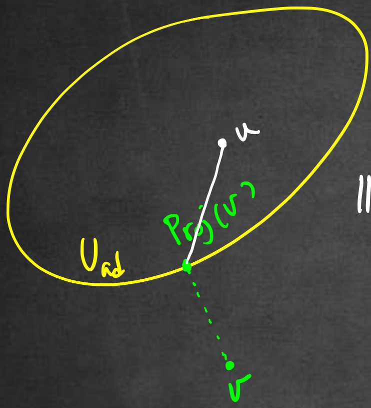
نکته ـ نامساوی تغییراتی صفحه قبل متناظر این است که

$$\min_{u\in U_{ad}} (\beta\bar{p},u)+\frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2}=\min_{u\in U_{ad}}(\beta\bar{p}+\lambda\bar{u},u)_{L^2}=(\beta\bar{p}+\lambda\bar{u},\bar{u})_{L^2}$$

$$\Downarrow$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر $\beta\bar{p}(x)+\lambda\bar{u}(x)>0$ باید $u(x)$ کمترین مقدار ممکن خود را اخذ کند که همان $u_a(x)$ است. به طور مشابه وقتی $\beta\bar{p}(x)+\lambda\bar{u}(x)<0$ باید $u(x)$ بیشترین مقدار خود را بگیرد.

تعریف - اگر H فضای هیلبرت باشد و $U_{ad} \subseteq H$ زیرمجموعه محدب و بسته باشد، آنگاه عملگر تصویر



$$\mathrm{Proj} : H \longrightarrow U_{ad}$$

تعریف می‌شود که

$$\| \mathrm{Proj}(v) - v \|_H = \min_{u \in U_{ad}} \| u - v \|_H$$

با توجه به اینکه $g(u) = \| u - v \|_H^2$ اگر قرار دهیم

$$\min_{u \in U_{ad}} g(u) = g(\bar{v}) \quad , \quad \bar{v} = \mathrm{Proj}\, v$$

باید $g'(\bar{v}) \cdot (u - \bar{v}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$

$$\Rightarrow \quad (\bar{v} - v \, , \, u - \bar{v})_H \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$\left(v - \mathrm{Proj}\, v\, ,\ u - \mathrm{Proj}\, v\right)_H \leq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

اکنون از نامساوی تغییراتی بدست می‌آید که

$$\left(-\frac{1}{\lambda}\beta \bar{P} - \bar{u}\, ,\ u - \bar{u}\right)_{L^2} \leq 0$$

بنابراین باید

$$(1) \qquad \bar{u} = \mathrm{Proj}_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\lambda}\beta \bar{P}\right)$$

از آنجا که p جواب معادله الحاقی است وابسته به y است و y حالت سیستم برحسب u بیان می‌شود.

لذا رابطه (1) خلاصه شرطهای لازم کنترل بهینه است. این رابطه بیان می‌کند که کنترل بهینه، $\bar{u}$، یک نقطه ثابت

نگاشت $u \longmapsto \mathrm{Proj}_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\lambda}\beta P\right)$ است.

فرض — $U_{ad} = \{ u \in L^2 : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \}$

$$\bar{v} = \mathrm{Proj}\, v = \begin{cases} u_a(x) & v(x) \le u_a(x) \\ v(x) & u_a(x) \le v(x) \le u_b(x) \\ u_b(x) & v(x) \ge u_b(x) \end{cases}$$

$$\| \bar{v} - v \|_{L^2}^2 \le \| u - v \|_{L^2}^2 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$\| \bar{v} - v \|_{L^2}^2 = \int_{\{v < u_a\}} |u_a - v|^2 dx + \int_{\{v > u_b\}} |u_b - v|^2 dx$$

اگر $u \in U_{ad}$ دلخواه باشد، چون $u_a \le u$ بنابراین

$$v < u_a \le u \quad \text{in} \quad \{v < u_a\} \Rightarrow 0 < u_a - v \le u - v$$

$$\Rightarrow \int_{\{v < u_a\}} |u_a - v|^2 dx \le \int_{\{v < u_a\}} |u - v|^2$$

نکته - نامساوی تغییراتی که نتیجه قید $u_a \le u \le u_b$ است بر مبنای روش KKT به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

توابع $L^2(\Omega) \ni \mu_a, \mu_b \ge 0$ وجود دارند که

- $\beta \bar{p} + \lambda \bar{u} = \mu_a - \mu_b$

- $\mu_a(x)\,(u_a(x) - \bar{u}(x)) = \mu_b(x)\,(\bar{u}(x) - u_b(x)) = 0$ a.e. in Ω

$$\mu_a(x) = \left(\beta \bar{p}(x) + \lambda \bar{u}(x)\right)_+ \quad , \quad \mu_b(x) = \left(\lambda \bar{u}(x) + \beta \bar{p}(x)\right)_-$$

$$s_+ = \frac{1}{2}(|s| + s) \quad , \quad s_- = \frac{1}{2}(|s| - s) \Rightarrow s = s_+ - s_-$$

شرط دوم بالا از (2) نتیجه می‌شود.

شرط مرزی جدید:

(3) $\quad 0 \le \alpha \in L^\infty(\partial\Omega),\ \beta \in L^\infty(\Omega),\ \begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ \partial_n y + \alpha y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

تعبیر جواب معادله بالا: $y \in H^1(\Omega)$ را جواب ضعیف گوئیم:

$$\forall \varphi \in C^\infty(\bar\Omega) \qquad \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y \cdot \varphi \, d\sigma = \int_\Omega \beta u \varphi \qquad (4)$$

تذکر: $H^1(\Omega) = \{ y \in L^2 : \partial_i y \in L^2 \}$ بستار $C^\infty(\bar\Omega)$ است با نرم $\|y\|_{H^1} = \left[\int_\Omega y^2 + |\nabla y|^2 \, dx \right]^{1/2}$

نگاشت $T : C^\infty(\bar\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ که با ضابطه

$$T\varphi = \varphi\big|_{\partial\Omega}$$

تعریف می‌شود در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\exists C > 0 \qquad \| T\varphi \|_{L^2(\partial\Omega)} \le C \|\varphi\|_{H^1}$$

که تنها به Ω وابسته است

با جدگذاری نتیجه می‌شود: $T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ به صورت خوش‌تعریف توسعه پیدا می‌کند و

$$\|Ty\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|y\|_{H^1} \qquad \forall y \in H^1$$

این نگاشت را اثر (trace) می‌نامیم.

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \operatorname{Im} T \subseteq L^2(\partial\Omega)$$

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) := \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$$

به علاوه می‌دانیم

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ y \in H^1(\Omega) \;:\; Ty = 0 \right\}$$

از این پس هر موقع از عملگر اثر استفاده کنیم، نماد T را نمی‌نویسیم. منظورمان از مثلاً $\int_{\partial\Omega} y\varphi \, d\sigma$

$y \leftarrow Ty$ است.

اگر $y \in H^1(\Omega)$ باشد، $\partial_n y \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: ($\vec{n}$ بردار عمود رو به بیرون است.)

$$y \in C^\infty(\bar{\Omega}) \rightsquigarrow \partial_n y = \nabla y \cdot \vec{n} \rightsquigarrow \int_{\partial\Omega} (\partial_n y)\, \varphi \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \nabla y)\, dx$$

$$y \in H^1(\Omega) : \quad \langle \partial_n y , \varphi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} := \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi + \varphi \, \Delta y \quad dx$$

اگر بدانیم $f = -\Delta y$، آنگاه $\partial_n y$ به صورت بالا خوش تعریف خواهد بود.

برگردیم به حل مسئله (3)، به روش لاگرانژین خواهیم داشت:

$$L(y, u, p) = J(y, u) - \langle -\Delta y - \beta u , P \rangle_{(H^1)', H^1}$$

اگر از تساوی (4) نسبت به $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ حد بگیریم، می‌توانیم (4) را برای هر $C^\infty(\bar{\Omega})$ داشته باشیم.

لذا در تعریف جواب ضعیف (4) می‌توانیم فرض کنیم $\varphi \in H^1(\Omega)$ دلخواه است. لذا دو طرف تساوی (4) به معنای

عملگر خطی کران‌دار روی $H^1(\Omega)$ معنا دارد. این یعنی معادلات که توی $-\Delta y = \beta u$ در $(H^1(\Omega))'$ تعبیر می‌شود.

عملاً

$$A : H^1(\Omega) \longrightarrow (H^1(\Omega))'$$

$$Ay = -\Delta y$$

$$\langle -\Delta y , \varphi \rangle_{(H^1)', H^1} = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha y \cdot \varphi \, d\sigma$$

به همین ترتیب باید داشته باشیم:

$$B : L^2(\Omega) \longrightarrow (H^1(\Omega))'$$

$$Bu = \beta u$$

با این تعبیر باید $L : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شود.

$$L(y,u,p) = J(y,u) + \int_\Omega \beta u p \, dx - \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p \, dx - \int_{\partial\Omega} \alpha y p \, d\sigma$$

$$\partial_p L(\bar{y},\bar{u},\bar{p}) = 0 \implies$$ $\bar{y}$ در (4) صدق می‌کند $\bar{y}$ $\Rightarrow$ (3) جواب ضعیفِ $\bar{y}$ است.

$$0 = \langle \partial_y L(\bar{y},\bar{u},\bar{p}), z \rangle_{(H^1)', H^1} = \langle \partial_y J, z \rangle - \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla p \, dx - \int_{\partial\Omega} \alpha z p \, d\sigma$$

$$\forall z \in H^1(\Omega)$$

که بدین معناست p جوابِ ضعیفِ معادله زیر است:

$$\begin{cases} -\Delta p = \partial_y J & \text{in } \Omega \\ \partial_n p + \alpha p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad (5)$$

مسئله الحاقی

$$\left(\partial_u L(\bar{y},\bar{u},\bar{p}), u-\bar{u}\right)_{L^2} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

نامساوی تغییراتی نیز از رابطه به دست می‌آید که معادل است با

$$\partial_u J + \beta \bar{p} \in \left(FC(\bar{u})\right)^*$$

تمرین - فرض کنید $A^{-1} : (H^1)' \longrightarrow H^1$ وجود دارد و کران‌دار است. با محاسبه

$$(A^{-1})^* : (H^1)' \longrightarrow H^1$$

نشان دهید $P = (A^{-1})^* \partial_y J$ در معادله (5) صدق می‌کند.