کنترل بهینه

جلسه شانزده ۹۹/۸/۲۶

صورت کلی مسأله کنترل بهینه:

$$\begin{cases} \min \ J(y,u) \\ \text{Subject} \quad G(y,u)=0 \ , \quad u\in U_{ad} \end{cases}$$

$$G : \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

$$J : \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{Y}$، $\mathcal{U}$ و $\mathcal{Z}$ فضاهای برداری دلخواه هستند، که در هر مسأله کنترل بهینه با توجه به فیزیک مسأله تعریف می‌شوند.

مثلاً در کاربردهای جلسه قبل $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ که متناظر آن $\mathcal{Y} = C^1[t_0,t_f]$

$$\mathcal{U} = C^0[t_0,t_f]$$

$$G(x,u) = \dot{x} - f(t,x,u) : \mathcal{Y}\times\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Z} = C[t_0,t_f]$$

حالت خطی:

$$G(y,u) = Ay - Bu$$

$A: Y \longrightarrow Z$, $B: \mathcal{U} \longrightarrow Z$ دو نگاشت خطی هستند.

به عنوان مثال اگر $\dot{x} = ax + bu$ که a ماتریس $n\times n$ و b ماتریس $n\times m$ است در رابطه

$$G(x,u) = \dot{x} - ax - bu$$

$$A: C^1 \longrightarrow C^0 \quad , \quad B: L^\infty \longrightarrow L^\infty$$

$$Ax = \dot{x} - ax \qquad Bu = bu$$

اگر $A: Y \longrightarrow Z$ وارون پذیر باشد، آنگاه می‌توان حالت سیستم را برحسب کنترل به صورت دقیق بیان کرد.

$$y = A^{-1}Bu \; : \; \mathcal{U} \longrightarrow Y$$

در این صورت تابع هزینه به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(u) := J(y,u) = J(A^{-1}Bu, u)$$

در این حالت مسئله کنترل بهینه به مسئله بهینه‌سازی

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u)$$

تبدیل می‌شود.

اگر نگاشت $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، یک نگاشت C^1 باشد، شرط لازم مرتبه اول بهینه‌سازی این است که

اگر $\bar{u}$ جواب مسئله بالا باشد، آنگاه

$$f'(\bar{u}) \in \left(FC(\bar{u})\right)^{*} = \left\{ l \in \mathcal{U}' : \langle l, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in FC(\bar{u}) \right\}$$

$$FC(\bar{u}) = \left\{ v \in \mathcal{U} : \exists\, \theta > 0 , \quad \bar{u} + \epsilon v \in U_{ad} \ \forall\, 0 < \epsilon < \theta \right\}$$

درحالتی که U_{ad} محدب باشد، این شرط معادل است با اینکه

$$f'(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}$$

$$f(u) = J(A^{-1}Bu, u), \qquad J : Y \times \mathcal{U} \longrightarrow Z$$

$$f'(u)v = \langle \partial_y J, A^{-1}Bv \rangle_{Y', Y} + \langle \partial_u J, v \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}}$$

$$A^{-1} : Z \longrightarrow Y, \qquad (A^{-1})^* : Y' \longrightarrow Z'$$

$$\langle (A^{-1})^* l_y, z \rangle_{Z', Z} = \langle l_y, A^{-1}z \rangle_{Y', Y}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \langle (A^{-1})^* \partial_y J, B(u - \bar{u}) \rangle_{Z', Z} + \langle \partial_u J, u - \bar{u} \rangle$$

متغير الحالة $\quad p := (A^{-1})^* \partial_y J \in Z'$

$$\Rightarrow \quad \langle B^* p + \partial_u J, u - \bar{u} \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

بطور خلاصه به سیستم بهینگی زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} A^* p = \partial_y J \longrightarrow \text{معادله الحاقی} \\ A y = B u \\ B^* p + \partial_u J \in (FC(\bar{u}))^* \iff \langle B^* p + \partial_u J , u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \end{cases}$$

روش لاگرانژین :

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle p , Ay - Bu \rangle_{Z', Z}$$

$$L : Y \times \mathcal{U} \times Z' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \partial_y L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \rightsquigarrow \text{معادله الحاقی} \quad A^* \bar{p} = \partial_y J(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) \\ \partial_p L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \Longrightarrow A\bar{y} = B\bar{u} \quad \text{معادلات سیستم} \\ \underbrace{\partial_u L(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})}_{= \partial_u J + B^* p} \in (FC(\bar{u}))^* \end{cases}$$

کنترل بهینه معادلات دیفرانسیل جزئی:

مثال- حالت ایستا سیستم پایا

$$\beta \in L^\infty(\Omega) \qquad \begin{cases} -\Delta y = \beta u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\| y - \underbrace{y_\Omega}_{\text{حالت مطلوب سیستم}} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

یعنی (PDE) بالا: y را جواب ضعیف این معادله گوییم، هرگاه

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \quad \int_\Omega \beta u \varphi \, dx = \int_\Omega (-\Delta y)\varphi \, dx = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx$$

تعریف- فضای سوبولوف $H_0^1(\Omega)$ را بستار $C_0^\infty(\Omega)$ نسبت به نرم

$$\|\varphi\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2}$$

تعریف می‌کنیم.

مرزان دیریکله $H_0^1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$ و تخمین زیر برقرار است:

$$\|u\|_{L^2} \leq C\,\|u\|_{H_0^1} = C\,\|\nabla u\|_{L^2}$$

به طور شهودی:

$$H_0^1(\Omega) = \{\, u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega) \,,\ u|_{\partial\Omega} = 0 \,\}$$

دوگان فضای H_0^1 را با H^{-1} نشان می‌دهیم و می‌دانیم که عملگر $A = -\Delta$،

$$A : H_0^1 \longrightarrow H^{-1}$$

خوش‌تعریف است و $A^{-1} : H^{-1} \longrightarrow H_0^1$ یک عملگر خطی پیوسته است.

وارون‌پذیری یعنی معادله $Ay = v$ جواب یکتای $y = A^{-1}v$ دارد و پیوستگی یعنی

$$\|y\|_{H_0^1} \leq C \cdot \|v\|_{H^{-1}}$$

$$G(y,u) = Ay - Bu \; : \; \underbrace{H^1_0(\Omega)}_{Y} \times \underbrace{L^2(\Omega)}_{U} \longrightarrow \underbrace{H^{-1}(\Omega)}_{Z}$$

$$B : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$Bu = \beta u$$

$$A^{-1} : H^{-1} \longrightarrow H^1_0$$

محاسبه $(A^{-1})^*$ و B^* :

$$(A^{-1})^* : H^{-1} \longrightarrow (H^{-1})' \cong H^1_0$$

$$\langle v, (A^{-1})^* u \rangle_{H^1, H^1_0} = \langle u, A^{-1} v \rangle_{H^{-1}, H^1_0}$$

$$z = A^{-1} v \Rightarrow -\Delta z = v$$

$$y = (A^{-1})^* u \Rightarrow \langle v, y \rangle_{H^{-1}, H^1_0} = \int_\Omega -\Delta z \cdot y = \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla y$$

$$= \int -\Delta y \cdot z = \langle -\Delta y, A^{-1} v \rangle_{H^{-1}, H^1_0}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta y = u \quad \Rightarrow \quad y = A^{-1} u \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = (A^{-1})^*$$

محاسبه B^* :

$$B : L^2 \longrightarrow H^{-1}$$

$$B^* : H^1_0 \longrightarrow L^2$$

$$\langle Bu , y \rangle_{H^{-1}, H^1_0} = (u, B^* y)_{L^2}$$

$$\| $$

$$\int \beta u y = (u, \beta y)_{L^2} \quad \Rightarrow \quad B^* y = \beta y = By$$

$$\Rightarrow \quad B^* = B\big|_{H^1_0}$$

شرایط لازم بهینگی :

$$\partial_y J = y - y_\Omega \quad , \quad \partial_u J = \lambda u$$

$$H^1_0 \ni p = (A^{-1})^* \partial_y J \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\Delta p = \partial_y J = y - y_\Omega & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

معادله الحاقی

$$B^* p + \partial_u J = \beta p + \lambda u \in (FC(\bar{u}))^* \iff \langle \beta p + \lambda u , u - \bar{u} \rangle \geq 0$$

روش لاگرانژین :

$$L(y,u,p) = J(y,u) - \langle p, -\Delta y - \beta u \rangle$$

$$L : H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(y,u,p) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla y - \beta p u \, dx$$

* $\partial_p L = 0 \rightarrow -\Delta y = \beta u$

* $\partial_y L = 0 \rightarrow \langle \partial_y L, z \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int (y - y_\Omega) \cdot z - \nabla p \cdot \nabla z \, dx = 0 \quad \forall z \in H_0^1$

$$= \int_\Omega \big((y - y_\Omega) + \Delta p \big) z \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta p = y - y_\Omega$$

* $\langle \partial_u L, u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$

حالت خاص: $U_{ad} = \{u : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)\}$ ، $u_b - u_a \geq \delta > 0$

محاسبه $L^2 = \mathcal{U}' \supseteq (FC(\bar{u}))^*$

$$v \in (FC(\bar{u}))^* \Longleftrightarrow (v, u)_{L^2} \geq 0 \quad \forall u \in FC(\bar{u})$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{u} + \epsilon u \in U_{ad}$$

$$0 < \epsilon < \theta$$

مجموعه‌ی فعال $A_+ = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) = u_a(x)\}$, $A_- = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) = u_b(x)\}$

ادعا: $v \in (FC(\bar{u}))^* \Longleftrightarrow \operatorname{Supp} v \subseteq \overline{A_+ \cup A_-}$, $v \geq 0$ روی A_+ , $v \leq 0$ روی A_-

ابتدا تابع $\varphi \in C(\Omega)$ را به گونه‌ای بگیرید که $\operatorname{Supp} \varphi \subseteq \{u_a + \theta \leq \bar{u}(x) \leq u_b - \theta\}$

$$\Longrightarrow \bar{u} + \varepsilon \varphi \in U_{ad} \quad \forall 0 < \varepsilon < \theta \Longrightarrow \varphi \in FC(\bar{u}) \Longrightarrow \int_\Omega v \varphi \geq 0$$

چون φ دلخواه است پس $\quad v \equiv 0 \quad$ در $\{u_a+\theta \le u(x) \le u_b-\theta\}$ به ازای هر $0<\theta$ دلخواه.

$$\Longrightarrow \quad v \equiv 0 \quad \text{on} \quad \{u_a < u(x) < u_b\}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Supp} v \subseteq \overline{\{u=u_a\} \cup \{u=u_b\}} = \overline{A_+ \cup A_-}$$

اکنون تابع مثبت φ را به گونه‌ای انتخاب کنید که

تابع مشخصه مجموعه $A_+ \supseteq B$

$$\bar{u} + \varepsilon \varphi \cdot \chi_B \qquad \forall\, 0<\varepsilon<\delta \quad \Longrightarrow \varphi \chi_B \in FC(\bar{u})$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \int_\Omega v \cdot \varphi \chi_B \, dx = \int_B v \cdot \varphi$$

اگر $B=\{v<0\}$ که نشان می‌دهد باید B اندازه صفر باشد.

$$\Longrightarrow \quad v \ge 0 \quad \text{on} \quad A_+$$

به طور مشابه $v \le 0$ روی A_-.

جمع‌بندی: شرط لازم $\lambda u + \beta p \in (F C(\bar u))^*$ معادل است با اینکه

$$\begin{cases} \lambda \bar u + \beta p \geq 0 & \text{in } A_+ = \{\bar u = u_a\} \\ \lambda \bar u + \beta p \leq 0 & \text{in } A_- = \{\bar u = u_b\} \\ \lambda \bar u + \beta p = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{A_+ \cup A_-} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \bar u(x) = \begin{cases} u_a(x) & \lambda \bar u(x) + \beta(x) p(x) > 0 \\ u_b(x) & \lambda \bar u(x) + \beta(x) p(x) < 0 \end{cases}$$

هرچند حالت $\lambda \bar u(x) + \beta(x) p(x) = 0$ رابطه بالا اطلاعاتی نمی‌دهد و همین رابطه نتیجه می‌دهد که

$$\bar u(x) = -\frac{\beta(x)\, p(x)}{\lambda}$$