کنترل بهینه

جلسه پانزده ۹۹/۸/۲۴

روشهای عددی

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \ell(t,x,u)\, dt$$

$$H = \ell + p\cdot f$$

شرط لازم بهینگی:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H \\ \dot{p} = -\nabla_x H \\ 0 = \nabla_u H \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ در حالت کنترل بدون قید

روش مستقیم : با تقریب زدن معادله حالت و گسسته‌سازی روی کرادم، مستقیم تابع هزینه را مینیمم می‌کنیم.

روش غیرمستقیم : در این روشها سیستم بهینگی بالا که شرط لازم نقاط بهینه هستند، حل می‌شوند.

روش گرادیان کاهشی

$$\delta J[u^*; v] = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_u H \cdot v \, dt$$

با یک نقطه شروع اولیه مثل $u_0(t)$ ، در هر گام u_{n+1} را از نقطه u_n و حرکت در راستای عکس گرادیان J به دست می‌آوریم.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \tau \nabla_u H$$

الگوریتم: ۱- نقطه شروع را با یک حدس معقول با تابع $u_0(t)$ قرار می‌دهیم.

۲- دستگاه زیر را برای $u = u_n$ حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H(x, u_n, p) & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = -\nabla_x H(x, u_n, p), & p(t_f) = 0 \end{cases}$$

(در حالتی که t_f مشخص است و $x(t_f)$ آزاد است)

۳- (x_n, p_n) را جواب مرحله ۲ بگیرید و $\nabla_u H(x_n, u_n, p_n)$ را محاسبه کنید. اگر نرم آن

$$\int_{t_0}^{t_f} |\nabla_u H|^2 \, dt \le \gamma^2$$

برای یک γ کوچک مشخص، الگوریتم متوقف می‌شود.

۴- اگر نرم $\nabla_u H$ از γ بزرگتر باشد، آنگاه قرار دهید

$$u_{n+1} = u_n - \tau \nabla_u H(x_n, u_n, p_n)$$

و به مرحله ۲ برگردید.

$$J(u_{n+1}) - J(u_n) \approx \delta J[u_n, u_{n+1} - u_n] = \int \nabla_u H(x_n, u_n, p_n) \cdot (u_{n+1} - u_n) \, dt$$

$$= \int -\tau |\nabla_u H|^2 \, dt$$

اگر قرار دهیم $\tau = \dfrac{q\,|J(u_n)|}{\|\nabla_u H\|^2}$، آنگاه به نسبت q مقدار J کاهش پیدا می‌کند.

مثال-
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ x(0) = 4 \end{cases} \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{2}(u^2 + x^2)\, dt$$

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + x^2) + p(-x + u) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial u} = u + p$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -x + p \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_{n+1} = u_n - \tau(u_n + p_n)$$

که p_n جواب سیستم پسین بالا است.

تذکر- اگر از رابطه $\nabla_u H = 0$ بتوانیم u را برحسب (t, X, p) محاسبه کنیم، آنگاه با جایگذاری آن در معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H \\ \dot{p} = -\nabla_x H \end{cases}$ تنها گام ۲ الگوریتم کافی است انجام شود.

مثال- در مثال قبل $u = -p$ است و معادلات دیفرانسیل بصورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - p \ , & x(0) = 4 \\ \dot{p} = -x + p \ , & p(1) = 0 \end{cases}$$

روش پرتابی (Shooting method)

$$(*)\quad\begin{cases}\dot{x} = \nabla_p H, & x(t_0)=x_0\\ \dot{p} = -\nabla_x H, & p(t_f)=0\end{cases}$$

ایده: با شرط اولیه $p(t_0)=p_0$ مسئله بالا را حل می‌کنیم. در این صورت $p(t)$ و متعاقباً $p(t_f)$ تابعی از p_0 است.

به دنبال پیدا کردن p_0 مناسب هستیم که شرط $p(t_f)=0$ را برآورده کند.

اگر جواب وابسته به p_0 را با $p(t;p_0)$ نشان دهیم، باید معادله $p(t_f;p_0)=0$ را حل کنیم.

در حل معادله $p(t_f;p_0)=0$ که p_0 مجهول است با روش نیوتن دنباله بازگشتی زیر را باید بسازیم:

$$p_0^{k+1} = p_0^k - \left(\frac{\partial p}{\partial p_0}\right)^{-1} p(t_f;p_0^k)$$

به طور معادل:

$$p_0^{k+1} = p_0^k + d_{p_0}^k, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial p_0}\right) d_{p_0}^k = -p(t_f;p_0^k)$$

ماتریس $n\times n$

پیچیدگی این الگوریتم محاسبه ماتریس $\dfrac{\partial P}{\partial p_0}$ است.

روش اول: (X, P) جوابهای $(*)$ تابعی از p_0 هستند. مشتق آنها نسبت به p_0 ماتریسهای $n\times n$ هستند که با X_{p_0} و P_{p_0} نشان میدهیم. این ماتریسها در معادلات زیر صدق میکنند:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{X}_{p_0} = D^2_{pp}H \cdot P_{p_0} + D^2_{px}H \cdot X_{p_0} & X_{p_0}(t_0) = 0 \\ \dot{P}_{p_0} = -D^2_{px}H \cdot P_{p_0} - D^2_{xx}H \cdot X_{p_0} & P_{p_0}(t_0) = Id \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ سیستم از بعد $2n^2$.

با حل همزمان دستگاه بالا با $(*)$ فراهم میشود $\dfrac{\partial P}{\partial p_0} = P_{p_0}(t_f)$

روش دوم: دستگاه (*) را برای مقادیر اولیه P_0 و $P_0+\varepsilon e_i$ حل می‌کنیم $e_i=(0,0,\dots,1,0,\dots,0)$ (i-ام)

$$\frac{P(t_f, P_0+\varepsilon e_i) - P(t_f, P_0)}{\varepsilon} \approx \left(\frac{\partial P}{\partial P_0}\right) \text{ستون } i\text{-ام آن}$$

مثال - الگوریتم شیمیایی

دما $=x_1$

غلظت $=x_2$

جریان خنک‌کننده $=u$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2[x_1+0.25]+[x_2+0.5]\exp\left[\frac{25x_1}{x_1+2}\right] - [x_1+0.25]u \\ \dot{x}_2 = 0.5 - x_2 - [x_2+0.5]\exp\left[\frac{25x_1}{x_1+2}\right] \end{cases}$$

$$x_1(0)=0.05, \quad x_2(0)=0$$

$$J=\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+Ru^2)\,dt, \quad R=0.1$$

$$\nabla_u H = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2R}P_1[x_1+0.25]$$

تمرین - با جایگذاری u در سیستم بالا و بدست آوردن دستگاه (*) با دو روش مختلف بالا کنترل بهینه را پیدا کنید. (ص ۳۵۲ کتاب را ببینید)

نکته: اگر t_f و $x(t_f)=x_f$ مشخص باشند، در این حالت روی معادله الحاقی شرطی نداریم.

از طرفی $\dot{x} = f(t,x,u)$ اگر $u=u^k$ مشخص باشد، مستقل از معادله الحاقی جواب x برحسب شرط اولیه مشخص $x(t_0)=x_0$ به دست می‌آید. اگر u از رابطه $\nabla_u H = 0$ برحسب (x,p) محاسبه شود، آنگاه معادله $\dot{x}=f(t,x,u)$ با معادله $\dot{p}=-\nabla_x H$ مزدوج است و $x(t)$ به شرط اولیه $p(t_0)=p_0$ وابسته است.

به روش پرتابی که قبلاً صحبت شد، باید p_0 را پیدا کنیم که $x(t_f)=x_f$.

در حالت کلی به روش جریمه تابع هزینه را تغییر می‌دهیم:

$$J_\epsilon = J + \frac{1}{\epsilon}\left|x(t_f)-x_f\right|^2$$

و مسأله بهینه‌سازی J_ϵ را برای ϵ خیلی کوچک با شرط t_f و $x(t_f)$ آزاد حل می‌کنیم.

برای حل این مسأله جدید به نکته بعد مراجعه کنید.

نکته: اگر t_f و $x(t_f)$ آزاد باشند، باید شرط مرزی $p(t_f)=0$ را همراه با قید $H(t_f)=0$ حل کنیم.

(t_f نیز مجهول است)

به همان روش پرتابی با شرط اولیه $p(t_0)=p_0$ مسأله را حل می‌کنیم و به روش نیوتن جواب برای معادله زیر پیدا می‌کنیم:

$$b(p_0, t_f) = \big(p(t_f; p_0),\ H(t_f; p_0)\big) = (0,0)$$

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$p_0^{k+1} = p_0^k + d_p^k \quad , \quad t_f^{k+1} = t_f^k + d_{t_f}^k$$

$$Db(p_0^k, t_f^k)\begin{bmatrix} d_p^k \\ d_{t_f}^k \end{bmatrix} = -\, b(p_0^k, t_f^k)$$