کنترل بهینه

جلسه چهارده ۹۹/۸/۱۹

مثال - $\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u$. $U_{ad} = \{ u : M_i^- \le u_i(t) \le M_i^+ \}$

که ماتریس $n\times m$

$x(t_0) = x_0$

مسأله: کنترلی را پیدا کنید که در کوتاه‌ترین زمان به مبدأ برسیم . $x(t_f) = 0$.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \longrightarrow \min$$

$$H = 1 + p\cdot(f + Bu) \Rightarrow D_u H = p^T B \in (FC(u^*))^*$$

$$H(t, x(t), u^*(t), p(t)) = \min_{v \in U_{ad}} H(t, x(t), v, p(t))$$

$$B = [B_1 | \cdots | B_m]$$

$$u_i^*(t) = \begin{cases} M_i^- & p^T(t)\, B_i(t, x(t)) > 0 \\ M_i^+ & p^T(t)\, B_i(t, x(t)) < 0 \\ \text{نامعلوم} & p^T(t)\, B_i(t, x(t)) = 0 \end{cases}$$

نکته - این نوع کنترل‌ها که u چند مقدار ثابت مشخص را در طول زمان می‌گیرد bang-bang گوییم. در واقع به این معنا است که کنترل با بیشترین تلاش انتخاب می‌شود. در این حالت باید دقت کرد که کنترل u ناپیوسته است و در نتیجه حالت سیستم هموار نیست. شرایط گوشه‌ای که در جلسه پیش گفته شد باید در این نقاط ناپیوستگی برقرار باشد. (H و $D_u H$ پیوسته باشد.)

در این مثال این شرایط به وضوح برقرارند.

تعریف - اگر $p^T B_i(t, X(t)) = 0$ در یک بازه (t_1, t_2)، آنگاه سیستم را تکین گوییم. در حقیقت سیستم تکین حالتی است که کنترل در حالت سیستم تأثیری ندارد و عملاً با یک سیستم غیرقابل کنترل طرف هستیم.

به عنوان مثال وقتی $m=n=1$، با توجه به اینکه زمان نهایی t_f آزاد است، شرط مرزی سیستم همیلتونی $H\big|_{t_f} = 0$

$$H = 1 + p\cdot(f + Bu)\Big|_{t_f} = 0$$

به علاوه اگر f و B مستقل از t باشند، آنگاه H مستقل از t است و $\frac{d}{dt}H = 0 \Leftarrow H(t) = 0$ برای هر t.

کنترل u در این بازه تأثیری در رفتار سیستم ندارد. $\Rightarrow$ در بازه تکین $B(X(t)) = 0 \Rightarrow p \neq 0 \longrightarrow$

نکته - آنچه تاکنون بررسی کردیم، شرط لازم مرتبه اول بود. اگر سیستم تکین نباشد، این شرط برای پیدا کردن کنترل کافی است.

در حالت تکین باید از اطلاعات دیگر سیستم جهت تعیین کنترل u استفاده کنیم.

ایده: فرض کنیم $m=1$ و $D_u H$ درباره $[t_1, t_2]$ صفر است. بنابراین

$$\frac{d^i}{dt^i} D_u H = 0$$ ← به عنوان تابعی از X، P، u در نظر بگیرید.

اگر برای تعداد i،

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^i}{dt^i} D_u H\right) \neq 0$$ می‌توانیم u را برحسب X و P محاسبه کرد.

مثال-

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -u \end{cases} \qquad x_1(0)=x_2(0)=1 \,,\quad x_1(2)=x_2(2)=0 \qquad -10 \leq u \leq 10$$

$$J = \int_0^2 \frac{1}{2} x_1^2 \, dt \Rightarrow H = \frac{1}{2}x_1^2 + P_1(x_2+u) - P_2 u \Rightarrow H_u = P_1 - P_2$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 10 & P_1(t) < P_2(t) \\ -10 & P_1(t) > P_2(t) \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + P_1(x_2 + u) - P_2 u$$

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -x_1 \\ \dot{P}_2 = -P_1 \end{cases}$$

$P_1 = P_2$ شرط تکینگی است.

$$H_u = P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(P_1 - P_2) = 0$$

$$\Rightarrow -x_1 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2 = x_1$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(P_1 - x_1) = -x_1 - x_2 - u \Rightarrow u = -(x_1 + x_2)$$

قید روی حالت

$$\dot{X} = f(t, X, u) \qquad K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \ell(t, X, u)\, dt \qquad K(X(t), t) \leq 0$$

$$K = (k_1, \dots, k_\ell)$$

$$0 \leq \dot{x}_{n+1} = (k_1)^2\, \mathbb{1}(k_1) + \dots + (k_\ell)^2\, \mathbb{1}(k_\ell)$$

$$\mathbb{1}(k_i) = \begin{cases} 1 & k_i > 0 \\ 0 & k_i \leq 0 \end{cases}$$

اگر شرط مرزی $x_{n+1}(t_0) = x_{n+1}(t_f) = 0$ را در نظر بگیریم. با توجه به صعودی بودن x_{n+1} نتیجه می‌شود که

$$x_{n+1}(t) = 0 \qquad t_0 \leq t \leq t_f$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{1}(k_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_i \leq 0$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} f(t, X, u) \\ \sum_i (k_i(X,t))^2 \mathbb{1}(k_i) \end{bmatrix} = \tilde{f}(t, \tilde{X}, u)$$

$$H = \ell + \tilde{P} \cdot \tilde{f} \qquad \tilde{P} = (P, P_{n+1})$$

$$\dot{\tilde{P}} = -\nabla_x H = -\nabla_x \ell - (D_x \tilde{f})^T \tilde{P}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_{n+1} = -\partial_{x_{n+1}} H = 0$$ $\Rightarrow$ P_{n+1} یک مقدار ثابت است

$$\dot{P}_i = -\partial_{x_i} H = -\partial_{x_i} \ell - (\partial_{x_i} f)^T P - P_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_j (k_j)^2 \mathbb{1}(k_j)\right]$$

مثال- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$ و $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x_1^2 + u^2)\,dt$ ، t_f مشخص و $X(t_f)$ آزاد است.

به علاوه قیود زیر برقرارند:

$$-1 \leq u(t) \leq 1$$

$$-2 \leq x_2(t) \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} K_1(X) = -2 - x_2 \leq 0 \\ K_2(X) = x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + u^2) + p_1 x_2 + p_2(-x_2 + u)$$
$$+ p_3 \left[(-2-x_2)^2 \, \mathbb{1}(-2-x_2) + (x_2-2)^2 \, \mathbb{1}(x_2-2) \right]$$

$\dot{p}_3 = 0 \Rightarrow$ p_3 ثابت است.

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -x_1 , & p_1(t_f) = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 + p_2 - 2p_3(x_2+2)\,\mathbb{1}(-2-x_2) - 2p_3(x_2-2)\,\mathbb{1}(x_2-2) , & p_2(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$H_u = u + p_2 \Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & 1 < p_2(t) \\ -p_2 & \\ 1 & p_2(t) < -1 \end{cases}$$

تمرین- با در نظر گرفتن لاگرانژین $L(x,u,p,\nu) = \ell + p\cdot(f - \dot{x}) + \nu \cdot K$ و نوشتن شرایط (KKT) شرط لازم بهینگی را بدست آورید.