کنترل بهینه

جلسه سیزده ۹۹/۸/۱۷

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q(t)x(t) + u(t)^T R(t)u(t)\,dt$$

$$H^T = H,\ Q^T = Q,\ R^T = R \qquad H, Q \geq 0 \ , \qquad R > 0$$

$$J = \frac{1}{2}x(0)^T Hx(0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}(x^TQx + u^TRu) + (Ax+Bu)\cdot Hx \ dt$$

$$H(t,x,u,p) = \frac{1}{2}(x^TQx + u^TRu) + (Ax+Bu)\cdot(Hx+p)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H = Ax+Bu & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = -\nabla_x H = -\left[Qx + H^TBu + H^TAx + A^THx + A^Tp\right] & , \ p(t_f) = 0 \\ 0 = \nabla_u H = Ru + B^T(Hx+p) \end{cases}$$

$$P_* = Hx + p \Rightarrow \dot{P}_* = -Qx - A^TP_* \ , \quad P_*(t_f) = Hx(t_f)$$

$$u = -R^{-1}B^T P_* \Rightarrow \dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P_*$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{P}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ P_* \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ P_*(t_f) = H\,x(t_f) \end{array}$$

$$\dot{X} = A(t)\,X \rightsquigarrow X(t) = \Phi(t)\,X(0)$$

$$\Phi(t_0) = I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \varphi_{11}(t)\,x(t_0) + \varphi_{12}(t)\,P_*(t_0) \\ P_*(t) = \varphi_{21}(t)\,x(t_0) + \varphi_{22}(t)\,P_*(t_0) \end{cases} \qquad 1)$$

$$P_*(t_f) = \varphi_{21}(t_f)\,x(t_0) + \varphi_{22}(t_f)\,\overset{H\,x(t_0)}{\cancel{P_*(t_f)}} = H\,x(t_f) = H\left[\varphi_{11}(t_f)\,x(t_0) + \varphi_{12}(t_f)\,P_*(t_0)\right]$$

$$\Rightarrow \quad P_*(t_0) = S_0\,x(t_0)$$

$$(1) \Rightarrow \exists\, S(t) \text{ s.th. } P_*(t) = S(t)\,x(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = -R^{-1}B^T S\, x(t) \qquad \text{feed-back Control}$$

$$\dot{P}_* = -Qx - A^T P_*$$

$$\frac{d}{dt}(Sx) = -Qx - A^T Sx \Rightarrow \dot{S}x + S(Ax - BR^{-1}B^T \underbrace{P_*}_{Sx}) = -Qx - A^T Sx$$

$$\Rightarrow \dot{S} = -Q - A^T S - SA + SBR^{-1}B^T S \;, \quad S(t_f) = H$$

معادله بالا به Riccati معروف است و یک سیستم n^2 بعدی است.

درحقیقت جواب این دستگاه یک ماتریس متقارن S است و درحقیقت $\frac{n^2+n}{2}$ مجهول داریم.

(کافی است از معادله دیفرانسیل بالا ترانهاده بگیریم. با توجه به اینکه ماتریس‌های R، Q و H متقارن هستند، نتیجه می‌شود $S=S^T$.)

Tracking Problem

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t_0) = x_0$$

$$J = \frac{1}{2}[x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)] + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x(t) - r(t))^T Q(t) (x(t) - r(t)) + u^T(t) R u(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\| x(t_f) - r(t_f) \|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \| x(t) - r(t) \|_Q^2 + \| u \|_R^2 \, dt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & x(t_0) = x_0 \\ \dot{P}_* = -Qx - A^T P_* + Qr & P_*(t_f) = H(x(t_f) - r(t_f)) \\ 0 = Ru + B^T P_* & \Rightarrow \quad u = -R^{-1} B^T P_* \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{P}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ P_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Qr \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = \mathcal{A}(t) X + b(t)$$

$$X(t) = \Phi(t)\, X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-s+t_0)\, b(s)\, ds$$

$$\Phi(t_0) = Id$$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_{11}(t)\, x_0 + \varphi_{12}(t)\, P_*(t_0) + g_1(t) \\ P_*(t) = \varphi_{21}(t)\, x_0 + \varphi_{22}(t)\, P_*(t_0) + g_2(t) \end{cases}$$

$$P_*(t_f) = H\left(x(t_f) - r(t_f)\right) \implies P_*(t_0) = S_0 x_0 + g_0 \quad \forall x_0$$

$$\leadsto P_*(t) = S(t)X(t) + g(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = -R^{-1}B^T(SX+g)$$

$$\dot{P}_* = -QX - A^T P_* + Qr \implies \dot{S}X + S\underbrace{\dot{X}}_{AX - BR^{-1}B^T(SX+g)} + \dot{g} = -QX - A^T(SX+g) + Qr$$

$$\left[\dot{S} + SA - SBR^{-1}B^T + Q + A^T S\right] X + \left[\dot{g} - SBR^{-1}B^T g + A^T g - Qr\right] = 0$$

$S(t_f) = H$, $g(t_f) = Hr(t_f)$. کافی است عبارت‌های داخل کروشه صفر شوند که یک دستگاه $\frac{n^2+3n}{2}$ بعدی خواهد بود.

کنترل بهینه همراه با قید

$$\dot{x} = f(t,x,u) \qquad x(t_0)=x_0$$

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} l(t,x,u)\,dt$$

$$L[x,u,p] = \int_{t_0}^{t_f} l(t,x,u) + p\cdot(f-\dot{x})\,dt = \int_{t_0}^{t_f} H(t,x,u,p) - p\cdot\dot{x}\,dt$$

$$\begin{cases} \delta_u L = 0 \\ \delta_x L = 0 \\ \delta_p L = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \nabla_u H = 0 \\ \dot{p} = -\nabla_x H \\ \dot{x} = \nabla_p H = f \end{cases} \qquad (2)$$

نکته- اگر H به t وابسته نباشد (یعنی l و f به t وابسته نیستند)، اگر (x,u,p) جواب سیستم همیلتونی (2) باشد آنگاه

$$\frac{d}{dt} H(x(t),u(t),p(t)) = 0$$

بنابراین تابع همیلتونی روی هر جواب (2) ثابت است. به علاوه اگر t_f آزاد باشد، آنگاه $H=0$ روی مسیر جواب.

نکته - اگر در حل مسأله کنترل بهینه اجازه دهیم کنترل u قطعه قطعه پیوسته باشد، آنگاه هم جواب X قطعه قطعه C^1 است.

با در نظر گرفتن ضریب لاگرانژین P به صورت قطعه قطعه C^1، آنگاه شرایط گوشه‌ای زیر به سیستم همیلتونی (2) اضافه می‌شود.

در نقاط گوشه‌ای باید H و $\nabla_u H$ پیوسته باشند.

نکته - اگر G نگاشت کنترل - حالت باشد، یعنی $X = G(u)$ جواب سیستم حالت در نظر بگیریم، آنگاه

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} l(t, G(u), u) \, dt$$

و در مسأله‌ای که روی کنترل قید نداریم، در نقطه بهینه باید $\delta J[u;v] = 0$ برای هر راستای v.

$$\delta J[u;v] = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot y + \nabla_u l \cdot v \, dt$$

که $y = G'(u) v$ جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} \dot{y} = \nabla_x f \cdot y + \nabla_u f \cdot v \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

ادعا: $\delta J[u] = \nabla_u H$ یعنی. $\delta J[u;v] = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_u H \cdot v \, dt$ یا به عبارتی

$$\int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot y + \nabla_u l \cdot v \, dt \overset{?}{=} \int_{t_0}^{t_f} \nabla_u l \cdot v + p^T \underbrace{D_u f}_{\text{ماتریس } n\times k} \cdot v \, dt \qquad \forall v$$

به طور معادل کافی است نشان دهیم

$$\int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot y \, dt = \int_{t_0}^{t_f} p^T D_u f \, v \, dt$$

از طرفی داریم:

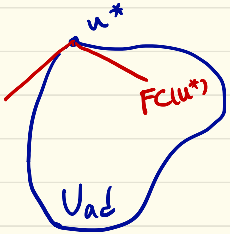
$$\begin{cases} \dot{y} = \nabla_x f \cdot y + D_u f \cdot v \\ \dot{p} = -\nabla_x l - \nabla_x f^T p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; p \cdot D_u f \, v = p \cdot (\dot{y} - \nabla_x f \, y) \quad , \quad \nabla_x l \cdot y = -(\dot{p} + \nabla_x f^T p) \cdot y$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} p \cdot (\dot{y} - \cancel{\nabla_x f \, y}) + (\dot{p} + \cancel{\nabla_x f^T p}) \cdot y \, dt = \int_{t_0}^{t_f} (p y)' \, dt = p(t_f) \, y(t_f) = 0$$

حال می‌دانیم اگر $J : U_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $J(u^*) = \min\limits_{u \in U_{ad}} J(u)$

اگر u^* نقطه درونی U_{ad} باشد، آنگاه $\delta J[u^*; v] = 0$ برای هر راستای v.



متناظر آن در مسئله کنترل بهینه این است که $\nabla_u H = 0$.

اما اگر u^* نقطه مرزی U_{ad} باشد،

$$\delta J[u^*; v] \geq 0 \qquad \forall v \in FC(u^*)$$

یادآوری:

$$FC(u^*) = \{ v \in X : \exists \delta : u^* + \theta v \in U_{ad} \ , \ \text{for } 0 < \theta < \delta \}$$

فضای زمینه کنترل‌ها

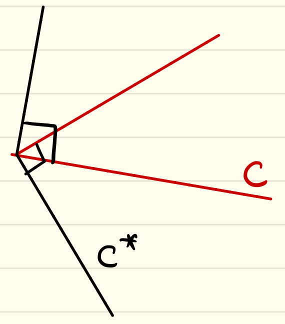
متناظر این مطلب در حل مسئله کنترل بهینه این است که

$$\forall v \in FC(u^*) \quad \int_{t_0}^{t_f} \nabla_u H \cdot v \, dt \geq 0$$

توضیح - اگر C یک مخروط در فضای باناخ X باشد، دوگان آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

دوگان مخروط
dual cone

$$C^* = \{ y \in X^* : \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \}$$



شرط لازم در مسأله کنترل بهینه عبارت است از:

$$\begin{cases} \nabla_u H \in \left(FC(u^*)\right)^* \\ \dot{X} = \nabla_p H \\ \dot{P} = -\nabla_x H \end{cases} \quad + (b.c.)$$

شرط لازم مرتبه دوم: در مسأله کنترل بهینه شرط لازم مرتبه دوم این است که

$$\delta^2 J[u^*; v, v] \geq 0$$

تمرین - اگر x و p جواب (2) باشند، آنگاه

$$\delta^2 J[u^*; v, v] = \int_{t_0}^{t_f} v^T D_u^2 H \, v \, dt$$

در نتیجه شرط لازم مرتبه دوم عبارت است از

$$D_u^2 H \geq 0$$

نکته - شرط $\nabla_u H \in (FC(u^*))^*$ به همراه شرط لازم مرتبه دوم $D_u^2 H \geq 0$ نتیجه می‌دهد که

$$H(t, x(t), u^*(t), p(t)) = \min_{u \in U_{ad}} H(t, x(t), u, p(t))$$

که به اصل مینیمم Pontryagin معروف است. (به طور خلاصه PMP)

مثال-

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u\end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x_1^2 + u^2 \, dt \quad ،$$

t_f مشخص است و $X(t_f)$ آزاد. کنترل u در شرط $|u| \leq 1$ صدق می‌کند.

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + u^2) + P_1 x_2 + P_2(-x_1 + u)$$

سیستم شبکه عبارت است از:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 & x_1(t_0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u & x_2(t_0) = x_2^0 \\ \dot{P}_1 = -x_1 + P_2 & P_1(t_f) = 0 \\ \dot{P}_2 = -P_1 & P_2(t_f) = 0 \\ \nabla_u H \in \left(FC(u^*)\right)^* \Leftrightarrow & u^*(t) = \underset{|u| \leq 1}{\operatorname{argmin}}\, H(t, X, u, P)\end{cases}$$

$$U_{ad} = \{u : |u(t)| \leq 1\}$$

$$FC(u^*) = \left\{ v : \ v(t) \leq 0 \text{ on } \{u^*(t) = 1\} \ \& \ v(t) \geq 0 \text{ on } \{u^*(t) = -1\} \right\}$$

$$\left(FC(u^*)\right)^* = \left\{ y : \begin{array}{l} y(t) \leq 0 \text{ on } \{u^*(t)=1\} \ \& \ y(t) \geq 0 \text{ on } \{u^*(t)=-1\} \\ y \equiv 0 \text{ in } \{-1 < u^*(t) < 1\} \end{array} \right\}$$

$$u^* + P_2 = \nabla_u H \in \left(FC(u^*)\right)^* \Rightarrow \begin{cases} u^* + P_2 \leq 0 & \text{on } \{u^* = 1\} \\ u^* + P_2 \geq 0 & \text{on } \{u^* = -1\} \\ u^* + P_2 = 0 & \text{on } \{-1 < u^* < 1\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} 1 & -P_2(t) \geq 1 \\ -P_2 & -1 < -P_2(t) < 1 \\ -1 & -P_2(t) \leq -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^* = \mathrm{Proj}_{U_{ad}}(-P_2)$$

$$\mathrm{Proj} : L^2[t_0, t_f] \longrightarrow U_{ad} = \{ u : |u(t)| \leq 1 \}$$

$$\mathrm{Proj}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha(t) \geq 1 \\ \alpha(t) & -1 \leq \alpha(t) \leq 1 \\ -1 & \alpha(t) \leq -1 \end{cases}$$