کنترل بهینه

جلسه دوازده ۹۹/۸/۱۲

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} \ell(t, x, u)\, dt$$

$$\mathcal{H}(t, x, u, p) = \ell(t, x, u) + p \cdot f(t, x, u)$$

$$L[x, u, p] = \int_{t_0}^{t_f} \ell + p(f - \dot{x})\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{H} - p \cdot \dot{x}\, dt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p \mathcal{H} & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = -\nabla_x \mathcal{H} & \\ 0 = \nabla_u \mathcal{H} & \end{cases}$$

حالت اول - t_f و $X(t_f)=X_f$ مشخص باشند. در این حالت $X(t_f)=X_f$ شرط مرزی مسأله است.

حالت دوم - t_f مشخص ولی $X(t_f)$ آزاد است. در این حالت باید $p(t_f)=0$.

حالت سوم - t_f مشخص و $X(t_f)$ روی رویه $m(X)=0$ قرار دارد. $m: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ در این حالت شرط مرزی

به صورت زیر است:

$$\begin{cases} p(t_f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla m_i(X(t_f)) \\ m(X(t_f)) = 0 \end{cases}$$

حالت چهارم - t_f آزاد است ولی مقدار $X(t_f)=X_f$ مشخص است. در این حالت شرط مرزی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathcal{H}(t_f, X(t_f), u(t_f), p(t_f)) = 0 \\ X(t_f) = X_f \end{cases}$$

حالت پنجم - t_f و $X(t_f)$ آزاد هستند. در این حالت شرط مرزی به صورت زیر است:

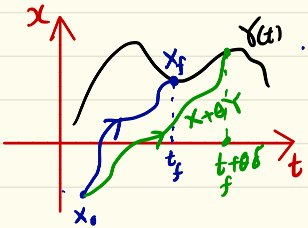
$$\begin{cases} \mathcal{H}(t_f, X(t_f), u(t_f), p(t_f)) = 0 \\ P(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\theta} L(X+\theta Y, u, p)\Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}\int_{t_0}^{t_f+\theta\delta} \mathcal{H} - p\cdot(\dot{X}+\theta\dot{Y})\, dt$$

$$= \delta\left[\mathcal{H}\big|_{t_f} - p(t_f)\cdot \dot{X}(t_f)\right] + \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x \mathcal{H}\cdot Y - p\cdot\dot{Y}\, dt$$

$$= \delta\left[\mathcal{H}\big|_{t_f} - p(t_f)\cdot \dot{X}(t_f)\right] - p\cdot Y\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\nabla_x \mathcal{H} + \dot{p})\, Y\, dt$$

$$= \delta\mathcal{H}\big|_{t_f} - p(t_f)\left[Y(t_f) + \delta\dot{X}(t_f)\right] + \int_{t_0}^{t_f} (\nabla_x \mathcal{H} + \dot{p})\, Y\, dt$$



چون مقدار $Y(t_f)$ و δ دلخواه می‌توانند باشند، پس باید $\mathcal{H}\big|_{t_f}=0$ و $p(t_f)=0$.

حالت ششم: t_f آزاد است و $X(t_f)$ روی خم $\gamma(t)$ قرار بگیرد. یعنی $X(t_f)=\gamma(t_f)$.

مشابه محاسبات بالا باید

$$\delta\mathcal{H}\big|_{t_f} - p(t_f)\cdot\left[Y(t_f) + \delta\dot{X}(t_f)\right] = 0$$

از طرفی باید

$$X(t_f+\theta\delta) + \theta\Upsilon(t_f+\theta\delta) = \gamma(t_f+\theta\delta)$$

$$\frac{d}{d\theta} \Rightarrow \quad \delta\dot{X}(t_f) + \Upsilon(t_f) = \delta\dot{\gamma}(t_f)$$

در نتیجه باید

$$\delta\left[\mathcal{H} - p\cdot\dot{\gamma}\right]\Big|_{t_f} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}\Big|_{t_f} = p(t_f)\cdot\dot{\gamma}(t_f)$$

در نتیجه شرط مرزی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} X(t_f) = \gamma(t_f) \\ \mathcal{H}\Big|_{t_f} = p(t_f)\cdot\dot{\gamma}(t_f) \end{cases}$$

<u>حالت هفتم</u>: t_f آزاد و $m(X(t_f))=0$.

مشابه قبل باید داشته باشیم:

$$\delta\mathcal{H}\Big|_{t_f} - p(t_f)\cdot\left[\Upsilon(t_f) + \delta\dot{X}(t_f)\right] = 0$$

$$m\left(X(t_f+\theta\delta)+\theta\Upsilon(t_f+\theta\delta)\right)=0$$

$$Dm(X(t_f))\left[\delta\dot{X}(t_f)+\Upsilon(t_f)\right]=0$$

شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} p(t_f)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla m_i(X(t_f)) \\ H\big|_{t_f}=0\ ,\quad m(X(t_f))=0 \end{cases}$$

مثال - $\ddot{x}+\dot{x}=u\ ,\quad x(0)=\dot{x}(0)=0$

$$J(u)=\int_0^2\frac{1}{2}u^2\,dt+\frac{1}{2}(x(2)-5)^2+\frac{1}{2}(\dot{x}(2))^2$$

$$y=\dot{x}\ ,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{X}=\begin{pmatrix}y\\u-y\end{pmatrix}=f(x,y,u)$$

$$J(u)=\int_0^2\frac{1}{2}u^2+\nabla_x h\cdot f\,dt+h(X(0))$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{1}{2}y^2$$

$$\ell(x,u) = \frac{1}{2}u^2 + y(x-5) + y(u-y)$$

$$\mathcal{H} = \ell + p \cdot f = \frac{1}{2}u^2 + y(x-5+P_1) + (y+P_2)(u-y)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_{P_1}\mathcal{H} = y & x(0)=0 \\ \dot{y} = \partial_{P_2}\mathcal{H} = u-y & y(0)=0 \\ \dot{P}_1 = -y & P_1(2)=0 \\ \dot{P}_2 = x-5+P_1+u-2y-P_2 & P_2(2)=0 \\ 0 = u+y+P_2 \end{cases}$$

به کمک رابطه آخر می‌توانیم در معادلات اول متغیر u را حذف کنیم .

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

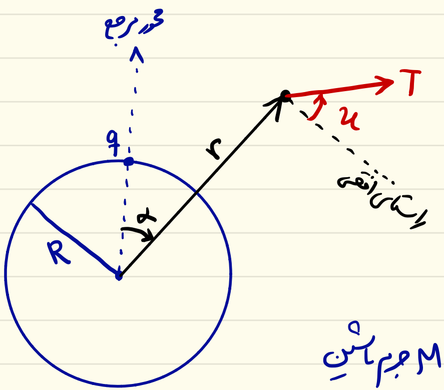
$$A\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\hat{z}=z-\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\rightsquigarrow\quad \frac{d}{dt}\hat{z}=A\left(\hat{z}+\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-5\end{pmatrix}$$

$$=A\hat{z}$$

$$\rightsquigarrow\quad \hat{z}(t)=e^{tA}\,\hat{z}(0)\ \xrightarrow{\text{با شرایط مرزی}}\ \hat{z}(t)$$

به دست می‌آید



مثال- یک ایستگاه فضایی در نظر بگیرید که دور یک سیاره در یک صفحه می‌چرخد.

تنها نیروی وارد بر آن نیروی جاذبه که برابر $Mg_0\frac{R^2}{r^2(t)}$ است که M جرم ایستگاه

و g_0 شتاب جاذبه است و همچنین نیروی محرک T که مقدار آن ثابت است. کنترل مسأله تنها زاویه نیرو نسبت به محور افقی

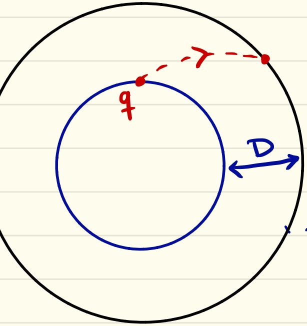
است.

$$\text{نیروی عمودی} = M\ddot{r} = T\sin u(t) - Mg_0 \frac{R^2}{r^2} + Mr(\dot{\alpha})^2$$

$$\text{نیروی افقی} = Mr\ddot{\alpha} = T\cos u(t)$$

$$x_1 = r, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \dot{r}, \quad x_4 = r\dot{\alpha}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_4}{x_1} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_4^2}{x_1} - \dfrac{g_0 R^2}{x_1^2} + \dfrac{T}{M}\sin u \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{x_3 x_4}{x_1} + \dfrac{T}{M}\cos u \end{cases} \qquad x_1(0) = R, \quad x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$$



مسأله: از نقطه q شروع به حرکت می‌کند. کنترلی را پیدا کنید که در کمترین زمان روی مدار با فاصله D از سطح زمین قرار بگیرد.

$$J(u) = \int_0^{t_f} dt$$

هرچند زمان t_f نامعلوم است ولی باید $x_1(t_f) = R + D$ ، $x_3(t_f) = 0$ ، $x_2(t_f)$ آزاد است.

از طرفی باید در زمان t_f مؤلفه عمودی نیرو صفر باشد. یعنی

$$T\sin u(t_f) - Mg_0\frac{R^2}{(R+D)^2} + M(R+D)\left(\dot{\alpha}(t_f)\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_4(t_f) = \text{معلوم}$$

این شکل ترکیبی از حالتهای چهار و پنج است. بنابراین شرط مرزی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathcal{H}\big|_{t_f} = 0 \;, \quad x_1(t_f) = R+D \;, \quad x_4(t_f) = x_f \;, \quad x_3(t_f) = 0 \\ p_2(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = 1 + p\cdot f = 1 + p_1x_3 + p_2\frac{x_4}{x_1} + p_3\left(\frac{x_4^2}{x_1} - \frac{g_0R^2}{x_1^2} + \frac{T}{M}\sin u\right)$$

$$+ p_4\left(-\frac{x_3x_4}{x_1} + \frac{T}{M}\cos u\right)$$

$$\begin{cases} \dot P_1 = -\partial_{x_1}\mathcal{H} = \dfrac{P_2 x_4}{x_1^2} + P_3\left[\dfrac{x_4^2}{x_1^2} - \dfrac{2g_0R^2}{x_1^3}\right] - \dfrac{P_4\, x_3 x_4}{x_1^2} \\ \dot P_2 = -\partial_{x_2}\mathcal{H} = 0 \\ \dot P_3 = -\partial_{x_3}\mathcal{H} = -P_1 + \dfrac{P_4 x_4}{x_1} \\ \dot P_4 = -\partial_{x_4}\mathcal{H} = \dfrac{-P_2}{x_1} - \dfrac{2P_3 x_4}{x_1} + \dfrac{P_4 x_3}{x_1} \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \frac{T}{M}\left(P_3 \cos u - P_4 \sin u\right) \rightsquigarrow u = \tan^{-1}\frac{P_3}{P_4}$$

که با جایگذاری u در معادلات دیفرانسیل حالت سیستم، به یک دستگاه <u>۸</u> بعدی می‌رسیم.

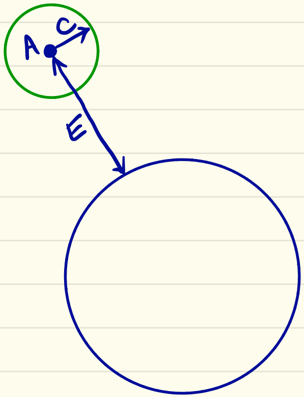
مسأله- فرض کنید ماشین دیگری با سرعت ثابت با دوره تناوب ۲ ساعت روی مدار D در حال حرکت است. این فضاپیما باید در کمترین زمان به آن ماشین دوم ملحق شود.

تنها تفاوت با مسأله قبل در این است که $\alpha(t_f)$ باید برابر زاویه حرکتی ماشین دوم بشود. یعنی باید

$$\alpha(t_f) \equiv \pi t_f \mod 2\pi$$

این مسأله ترکیب مسأله چهار و شش است و شرط مرزی به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\mathcal{H}\big|_{t_f} = \pi p_2(t_f)$$



مسأله- در کمترین زمان ممکن به همسایگی فاصله C از نقطه A برسد.

$$m(x,y) = (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 - C^2$$

$$m(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = 0$$

$$\tilde{m}(x_1,x_2) = m(x_1\cos x_2 \,,\, x_1\sin x_2) = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \lambda \nabla \tilde{m}$$

$$p_3(t_f) = p_4(t_f) = 0 \qquad \mathcal{H}\big|_{t_f} = 0 \,,\; \tilde{m}\big|_{t_f} = 0$$