کنترل بهینه

جلسه یازده ۹۹/۸/۱۰

کاربرد حساب تغییرات در کنترل بهینه

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \;, \quad x(t_0) = x_0 \\ J(u) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), u(t))\, dt \end{cases}$$

$$\min J(u)$$

نگاشت کنترل - حالت $x = G(u)$ که یک عملگر مشتق‌پذیر است و

$$y = \delta G(u; v) = G'(u)\, v$$

در معادله زیر صدق می‌کند :

$$\begin{cases} \dot{y} = \nabla_x f(t, x, u)\, y + \nabla_u f(t, x, u)\, v \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, G(u), u)\, dt$$

شرط لازم بهینگی $\qquad \delta J(u^*;v)=0 \quad \forall v$

$$(1) \quad \delta J(u^*;v)=\int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l(t,x^*,u^*)\cdot \underbrace{G'(u^*)v}_{y} + \nabla_u l(t,x^*,u^*)\,v\, dt = 0$$

چون $y = G'(u^*)v$ برحسب v خطی است و چون رابطه صریحی برحسب v نداریم از معادله بالا

نمی‌توان عبارت بالا را به صورت

$$\int_{t_0}^{t_f} [\,\dots + \nabla_u l\,]\cdot v\, dt$$

نوشت.

روش لاگرانژین:

$$L(u,x,p)=\int_{t_0}^{t_f} l(t,x,u) + p(t)\cdot(f(t,x,u)-\dot{x})\,dt$$

شرط بهینگی عبارتست از

$$(2) \quad \delta_u L = 0\,, \quad \delta_x L = 0\,, \quad \delta_p L = 0$$

$$\delta_u \mathcal{L}(u^*, x^*, p^*; v) = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_u l \cdot v + (\underbrace{D_u}_{\text{ماتریس } n\times m} f \cdot \underbrace{v}_{\text{بردار m بعدی}}) \cdot \underbrace{p^*}_{\text{بردار n بعدی}} \; dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(\nabla_u l + p^{*t} D_u f \right) v \; dt \underset{\text{برای هر } v}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla_u l(t, x^*, u^*) + p^{*t} D_u f(t, x^*, u^*) = 0$$

$$\delta_p \mathcal{L}(u^*, x^*, p^*; q) = \int_{t_0}^{t_f} (f - \dot{x}^*) \cdot q \; dt = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x}^* = f(t, x^*, u^*)$$

$$\delta_x \mathcal{L}(u^*, x^*, p^*; y) = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot y + p \cdot (\underbrace{\nabla_x f}_{n\times n} \cdot \underbrace{y}_{n\times 1} - \dot{y}) \; dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(\nabla_x \ell + p^t \nabla_x f + \dot{p}^t \right) y \, dt - (p \cdot y) \Big|_{t=t_0}^{t=t_f}$$

با توجه به شرط اولیه $X(t_0)=X_0$ تواب $y(t)$ به عنوان یک راستای شدنی باید در شرط $y(t_0)=0$ صدق کند.

$$FC(X^*) = \{ y \in C^1[t_0, t_f] \; : \; y(t_0) = 0 \}$$

در نتیجه عبارت دوم در رابطه بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$(p \cdot y) \Big|_{t=t_0}^{t=t_f} = p(t_f) \cdot y(t_f) \qquad (4)$$

برای محاسبه عبارت نهایی حالتهای مختلفی داریم:

حالت اول - مقدار $X(t_f)=X_f$ مشخص است. در این حالت باید $y(t_f)=0$ و در نتیجه

$$\delta_x \mathcal{L}(t, x^*, u^*, p^*; y) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\nabla_x \ell + p^t \nabla_x f + \dot{p}^t \right) y \, dt = 0$$

به ازای هر y که $y(t_0)=y(t_f)=0$.

بدین ترتیب شرط لازم بهینگی به صورت

$$\nabla_x l + (p^*)^t \nabla_x f + (\dot{p}^*)^t = 0$$

خواهد بود. به طور خلاصه

$$(3)\begin{cases} \dot{x}^* = f(t, x^*, u^*) \qquad x(t_0) = x_0 \\ \nabla_u l + (p^*)^t \nabla_u f(t, x^*, u^*) = 0 \\ \dot{p}^* = -(\nabla_x f)^t p^* - (\nabla_x l)^t \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$$

معادله الحاقی ← $\dot{p}^* = -(\nabla_x f)^t p^* - (\nabla_x l)^t$

با شرط مرزی $x(t_f) = x_f$

نکته- اگر (x^*, u^*, p^*) در رابطه (2) و معادل آن در (3) صدق کند، آنگاه رابطه (1) نیز برقرار است.

رابطه (1) عبارت بود از

$$\delta J(u^*; v) = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot y + \nabla_u l \cdot v \, dt$$

که تابع y در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\dot{y} = \nabla_x f \cdot y + \nabla_u f \cdot v$$

$$y(t_0) = y(t_f) = 0$$

رابطه دوم در (3) را در v ضرب کنید:

$$\nabla_u l \, v + (p^*)^t \, \nabla_u f \, v = 0$$

$$\delta J(u^*; v) = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \, y - (p^*)^t \, \nabla_u f \, v \, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \, y - (p^*)^t \left[\dot{y} - \nabla_x f \, y \right] dt$$

جزء به جزء

$$= \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \, y + (\dot{p}^*)^t y + (p^*)^t \, \nabla_x f \, y \, dt$$

معادله الحاقی

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[\nabla_x l - \nabla_x l - (p^*)^t \nabla_x f + (p^*)^t \nabla_x f \right] y \, dt$$

$$= 0$$

حالت دوم: t_f مشخص است ولی $x(t_f)$ آزاد است.

در این حالت $y(t_f)$ به عنوان یک عضو $FC(x^*)$ آزاد است و در نتیجه باید $p(t_f)=0$

و شرط لازم بستگی هم‌ رابطه (3) است که به جای شرط مرزی $x(t_f)=x_f$ باید $p(t_f)=0$ را جایگزین کنیم.

نکته - حالت $f(t,x,u)=u$ منجر به $\dot{x}=u$ می‌شود و در حقیقت همان مسائل حساب تغییرات است که در جلسات قبل کار کردیم.

$$J=\int_{t_0}^{t_f} l(t,x,\dot{x})\,dt$$

نکته - عبارت $\mathcal{H}(t,x,u,p)=l(t,x,u)+p\cdot f(t,x,u)$ به عنوان همیلتونین شناخته می‌شود. اگر x^*,u^*,p^* در شرایط لازم (3) صدق کنند، آنگاه

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{H}(t,x^*(t),u^*(t),p^*(t))\right]=\partial_t \mathcal{H}(t,x^*(t),u^*(t),p^*(t))$$

در واقع شرط (3) بدین صورت ساده می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p \mathcal{H} & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p}^t = -\nabla_x \mathcal{H} & p(t_f) = 0 \quad \text{یا} \quad x(t_f) = x_f \\ 0 = \nabla_u \mathcal{H} & \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \partial_t \mathcal{H} + \nabla_x \mathcal{H} \cdot \dot{x} + \nabla_u \mathcal{H} \cdot \dot{u} + \nabla_p \mathcal{H} \cdot \dot{p} = \partial_t \mathcal{H}$$

و در حالتی که f و l مستقل از t باشند، $\partial_t \mathcal{H} = 0$ و مقدار همیلتونی $\mathcal{H}$ روی خم جواب بهینه ثابت است.

نکته - شرط لازم مرتبه دوم بهینگی که معادل این است $\delta^2 J(u^*; v, v) \geq 0$ برای هر v دلخواه

به طور معادل باید $\delta^2 J(u^*; v, v) = \delta_u^2 L(x^*, u^*, p^*; v, v) + \delta_x^2 L(x^*, u^*, p^*; y, y) \geq 0$

که $y = G'(u^*) v$. رابطه آخر معادل است با اینکه

$$\mathcal{H}_{uu} \geq 0$$

مثال -

$$\dot{x} = 2(1-u); \qquad x(0) = 1$$

$$J(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 - x \, dt$$

مقدار $x(1)$ آزاد است.

$$\mathcal{H}(x,u,p) = \ell + p \cdot f = \frac{1}{2}u^2 - x + 2p(1-u)$$

شرایط بهینگی مرتبه اول

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H = 2(1-u) & x(0)=1 \\ \dot{p} = -\nabla_x H = +1 & p(1) = 0 \\ 0 = \nabla_u H = u - 2p & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p(t) = t-1, \quad u = 2(t-1), \quad \dot{x} = 6 - 4t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = 1 + 6t - 2t^2$$

شرط لازم مرتبه دوم $\qquad \mathcal{H}_{uu} = 1 \geq 0$

به علاوه مقدار همیلتونین روی خم بهینه برابر مقدار ثابت

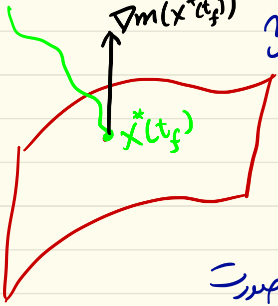
$$\mathcal{H}(x,u,p) = 2(t-1)^2 - (1+6t-2t^2) + 2(t-1)(3-2t) = -5$$

حالت سوم: t_f مشخص و x_f روی یک رویه قرار دارد، که آن رویه با شرط $m(x)=0$ به دست می‌آید.

$$m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

ابتدا حالت $k=1$ را در نظر بگیرید.

در زمان t_f شرط $m(x(t_f))=0$ برقرار است. راستاهای شدنی در $FC(x^*)$ در زمان t_f $y\in FC(x^*)$



باید به رویه $m=0$ مماس باشند. در نتیجه باید $y(t_f) \perp \nabla m(x^*(t_f))$

زیرا $\nabla m(x^*(t_f))$ بردار عمود بر رویه در نقطه $x^*(t_f)$ است.

در نتیجه در (4) برای اینکه داشته باشیم $y(t_f)\cdot p(t_f)=0$

کافی است $p(t_f) \parallel \nabla m(x^*(t_f))$ و در معادلات (3) شرط مرزی باید به صورت

$$\begin{cases} p(t_f) = \lambda \nabla m(x^*(t_f)) \\ m(x^*(t_f)) = 0 \end{cases}$$

بیان شود که $\lambda\in\mathbb{R}$ دلخواه است.

اگر $k>1$ باشد و $m=(m_1,\dots,m_k)$ آنگاه رویه $m(X)=0$ ، $n-k$ بعدی است (به شرط استقلال خطی $\nabla m_1,\dots,\nabla m_k$.) در نتیجه شرط اینکه $y(t_f)$ مماس بر رویه باشد، این است که

$$y(t_f)\cdot\nabla m_i(x^*(t_f)) = 0 \qquad i=1,\dots,k$$

و برای اینکه تساوی $y(t_f)\cdot p(t_f)=0$ را داشته باشیم، کافی است $p(t_f)\in \mathrm{Span}\{\nabla m_1,\dots,\nabla m_k\}$

$$\begin{cases} p(t_f)=\lambda_1\nabla m_1(x^*(t_f))+\lambda_2\nabla m_2(x^*(t_f))+\cdots+\lambda_k\nabla m_k(x^*(t_f)) \\ m(x^*(t_f)) = 0 \end{cases}$$

تمرین - حالت چهارم: t_f آزاد است ولی X_f مشخص شده است. یعنی $X(t_f)=X_f$ ولی مقدار t_f آزاد است.

نشان دهید شرط مرزی در شرط لازم بهینگی (3) به صورت $\mathcal{H}(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f))=0$ است.

مثال- نوسانگر x را در نظر بگیرید

$$\ddot{x}+\dot{x}=u$$

$$x(0)=\dot{x}(0)=0$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\,dt+\frac{1}{2}(x(2)-5)^2+\frac{1}{2}(\dot{x}(2))^2$$

تمرین- مسئله بالا را با قید $x(2)=5$ و $\dot{x}(2)=0$ حل کنید. (حالت اول)

$$\dot{x}=y,\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow \dot{X}=\begin{pmatrix}y\\u-y\end{pmatrix}=f(x,y,u)$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2\,dt+h(X(2)) \qquad h(x,y)=\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{1}{2}y^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2+\frac{d}{dt}h(X(t))\,dt+h(X(0))$$

$$=\frac{1}{2}\int \underbrace{u^2+\nabla_x h\cdot f}_{\ell(x,u)}\,dt+h(X(0))$$

$$\mathcal{H} = \ell + p \cdot f = u^2 + \nabla_x h \cdot f + p \cdot f$$