کنترل بهینه

جلسه دهم ۹۹/۸/۵

مسائل مقید

$J: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $V = \{ x:[a,b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n \}$

$$\min_{x \in D} J[x]$$

$G: V \longrightarrow \mathbb{R}^m$

قید تساوی $\longleftarrow$ $D = \{ x \in V : G[x] = 0 \}$

مثال - کوتاهترین مسیر روی استوانه $x^2+y^2=1$ که نقطه $(1,0,0)$ را به $(0,1,1)$ وصل کند.

$$D = \{ X:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : G[X] = x^2(t) + y^2(t) - 1 = 0 \}$$

$$J[x] = \int_0^1 \sqrt{1 + |\dot{x}|^2}\, dt$$

قید نامساوی :

$$D = \{ x \in V : H(x) \le 0 \}$$

$$H : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

قید isoperimetric

$$G_i[x] = \int_a^b g_i(t, x, \dot{x})\, dt = 0$$

(1)

$$\min_{G[x]=0} J[x] = \int_a^b \ell(t, x, \dot{x})\, dt$$

روش لاگرانژین :

$$L[x, \lambda] = J[x] + \underbrace{\lambda \cdot G[x]}_{\lambda_1 G_1 + \dots + \lambda_m G_m}$$

$$L : V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

شرط لازم: اگر x^* جواب (1) باشد، آنگاه $G[x^*] = 0$ و $\delta_x L(x^*, \lambda^*; \xi) = 0$

نکته- روش لاگرانژین بدین دلیل کار می‌کند که نشان می‌دهد گرادیان J ترکیب خطی گرادیان‌های G_i است.

$$\delta J[x^*, \xi] = J'[x^*] \cdot \xi$$

$$J'[x^*] : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

اگر V فضای هیلبرت باشد، آنگاه تابعک خطی پیوسته $J'[x^*]$ از ضرب داخلی یک بردار به دست می‌آید.

این بردار را به عنوان گرادیان J می‌شناسیم.

$$J'[x^*] \cdot \xi = \left(\nabla J[x^*] , \xi \right)_V$$

ضرب داخلی در V

اگر V هیلبرت نباشد، در حقیقت $\bigcap_{i=1}^{m} Nul(G_i'[x^*])$ صفحه مماس رویه $G[x]=0$ در نقطه x^* است.

یعنی هموار بودن این رویه در نقطه x^* این است که فضای برداری تولید شده بالا به عنوان صفحه مماس نقص بعد m داشته باشد.

(معادل استقلال خطی ∇G_iها است و اگر فضا هیلبرت است). در این حالت روش لاگرانژین نتیجه این حقیقت است که باید $Nul\, J'[x^*]$ بر رویه $G[x]=0$ در نقطه x^* مماس باشد.

$$0=\delta L[x^*,\lambda^*;\xi]=\frac{d}{d\theta}L[x^*+\theta\xi,\lambda^*]\Big|_{\theta=0}$$

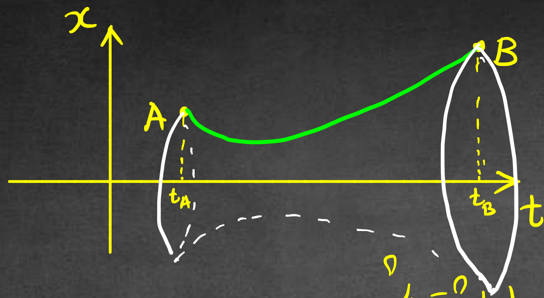
مثلاً در حالتی که مقدار x در دو طرف بازه مشخص باشد، باید $\xi(a)=\xi(b)=0$.

$$0=\int_a^b \frac{d}{d\theta}\left(\ell+\lambda\cdot g\right)dt=\int_a^b \nabla_x\ell\cdot\xi+\nabla_p\ell\cdot\dot{\xi}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[\nabla_x g_i\cdot\xi+\nabla_p g_i\cdot\dot{\xi}\right]$$

$$=\int_a^b\left(\nabla_x\ell+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla_x g_i-\frac{d}{dt}\left(\nabla_p\ell+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla_p g_i\right)\right)\xi\,dt$$

معادله اویلر-لاگرانژ $\Longrightarrow$ $$\nabla_x\ell+\lambda\cdot\nabla_x g=\frac{d}{dt}\left(\nabla_p\ell+\lambda\cdot\nabla_p g\right)$$

قید تساوی $\Longrightarrow$ $$\int_a^b g(t,x^*,\dot{x}^*)\,dt=0$$



مثال - خم به طول μ که دو نقطه A و B

را به هم وصل کند پیدا کنید به طوری

اگر آن را حول محور t دوران دهیم کمترین مساحت را داشته باشد.

$$D = \{ x : [t_A, t_B] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R} \ : \ x(t_A) = x_A \ , \ x(t_B) = x_B \}$$

$$J[x] = \int_{t_A}^{t_B} x(t) \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} \, dt$$

$$G[x] = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 + \dot{x}^2} \, dt = \mu$$

$$\Rightarrow L = J + \lambda G$$

$$= \int_a^b (x + \lambda) \sqrt{1 + \dot{x}^2} \, dt$$

$$\sqrt{1 + \dot{x}^2} = \frac{d}{dt} \left((x + \lambda) \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(L - \dot{x} \cdot \nabla_p L \right) = 0$$

$$(x+\lambda)\sqrt{1+\dot{x}^2} - \dot{x}\,\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C$$

$$x+\lambda = \frac{C}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \frac{\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2}$$

اگر به جای قید تساوی، قیدهای $H_i[x] = \int_a^b h_i(t,x,\dot{x})\,dt \le 0$ برای $i=1,\dots,k$ داشته باشیم آنگاه لاگرانژین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(x,\nu) = J[x] + \nu \cdot H[x]$$

و شرط لازم بهینگی عبارت است از:

$$\begin{cases} \delta_x L[x^*,\nu^*;\xi] = 0 \\ \nu \ge 0 \\ H[x^*]\cdot\nu = 0 \end{cases}$$

تمرین - در مثال قبل اگر طول خم حداکثر م باشد، شرایط لازم بهینگی را پیدا کنید.

قید نقطه‌ای

$G_i(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ برای هر t

در این نوع قیدها در حقیقت $G_i : V \to V'$ تعریف شده است در مقابل قید isopermetric که $G_i : V \to \mathbb{R}$ بود. در این حالت ضریب لاگرانژین یک خم است نه بردار ثابت.

$$L[x, P] = J[x] + \sum_{i=1}^{m} \langle P_i , G_i \rangle$$

ضرب داخلی روی V' یا زوج دوگانی V' و V.

$$L = \int_a^b l(t, x, \dot{x}) + P(t) \cdot G(t, x(t), \dot{x}(t)) \, dt$$

شرط لازم بهینگی:

اویلر-لاگرانژ $\Leftarrow$ $\delta_x L[x^*, P^*; \xi] = 0$

قید $\Leftarrow$ $\delta_p L[x^*, P^*; q] = G(t, x^*, \dot{x}^*) = 0$

اویلر-لاگرانژ

$$\nabla_x l + P^* \cdot \nabla_x G = \frac{d}{dt}\left[\nabla_p l + P^* \cdot \nabla_p G\right]$$

مثال صفحه اول

$$X:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(0)=(1,0,0)\ ,\quad X(1)=(0,1,1)$$

$$G[X]=x(t)^2+y(t)^2=1$$

$$L[X,p]=\int_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+p(t)\left(x(t)^2+y(t)^2-1\right)\,dt$$

$$\begin{cases} 2p(t)x=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1+|\dot{X}|^2}}\right)\\[2ex] 2p(t)y=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{1+|\dot{X}|^2}}\right)\\[2ex] 0=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{1+|\dot{X}|^2}}\right)\end{cases}$$

نکته - اگر قید نامساوی $H(x) \leq 0$ به صورت نقطه‌ای برقرار باشد، آنگاه

$$L[x,\nu] = J[x] + \langle \nu , H \rangle$$

$$= \int_a^b \ell(t,x,\dot{x}) + \nu(t) \cdot H(t, x(t), \dot{x}(t)) \, dt$$

$$\begin{cases} \delta_x L[x^*, \nu^*] = 0 \\ \nu^* \geq 0 \\ \langle \nu^*, H \rangle = 0 \end{cases}$$

رویکرد تغییراتی به مسائل کنترل بهینه

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$(3) \qquad J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \ell(t, x(t), u(t))\, dt$$

قرار است که تابع کنترل u را پیدا کنیم که $\min J[u]$ را بدهد.

این مسأله می‌تواند همراه با قیدهایی برای کنترل u یا حالت سیستم x باشد.

این قیدها مساوی یا نامساوی‌اند همینطور نقطه‌ای یا isoperimetric می‌توانند در نظر گرفته شوند.

اگر کنترل را با ضابطه $u^*(t) = \omega(t, X(t))$ انتخاب شود، ω را کنترل حلقه-بسته (closed-loop)

یا کنترل بازخوردی (feedback-Control) می‌گوییم.

اگر کنترل با ضابطه $u^*(t) = \omega(t, X(t_0))$ مشخص شده باشد، آن را کنترل حلقه-باز (open-loop)

می‌گوییم.

نکته- در حل مسئله کنترل بهینه می‌توانیم در تابع هزینه (3) فرض کنیم $h=0$. زیرا که

$$h(X(t_f), t_f) = h(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} h(X(t), t)\, dt$$

از آنجا که $h(x_0, t_0)$ به کنترل u وابسته نیست، مینیمم J با تابع هزینه در یکجا اتفاق می‌افتد.

$$\tilde{J}[u] = \int_{t_0}^{t_f} \ell + \partial_t h + \nabla_x h \cdot f(t, x, u)\, dt$$

نکته- خم X به عنوان جواب (2) تابعی از کنترل u است. در نتیجه می‌توان تابع هزینه

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_f} l(t, x, u)\, dt$$

به عنوان تابعی از u در نظر گرفت و در حالتی که قیدی برای مسأله نداریم، شرط لازم بهینگی

$$\delta J[u^*; v] = 0 \quad \text{یا} \quad J'[u^*] = 0$$

تابع $u \longmapsto X$ نگاشت کنترل-حالت (Control-to-State) گوییم.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \rightsquigarrow \quad X = \mathcal{F}(u)$$

اگر $y = \delta \mathcal{F}[u; v] = \mathcal{F}'[u](v)$ باشد، آنگاه y در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \dot{y} = \nabla_x f(t, x, u)\, y + \nabla_u f(t, x, u) \cdot v \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\delta J[u;v] = \int_{t_0}^{t_f} \nabla_x l \cdot \underbrace{y}_{F'[u]\cdot v} + \nabla_u l \cdot v \; dt = 0 \qquad \forall v$$

$$\Longrightarrow \nabla_x l \, F'[u] + \nabla_u l = 0$$

ایدهٔ کلیدی: روش لاگرانژین، مسأله را به صورت مینیمم کردن تابع هزینه J در نظر می‌گیریم همراه با قید تساوی (2)

$$\mathcal{L}(u, x, p) = \int_{t_0}^{t_f} l(t, x, u) + p(t) \cdot \left(f(t, x, u) - \dot{x} \right) dt$$

$$\begin{cases} \delta_u \mathcal{L} = 0 \\ \delta_x \mathcal{L} = 0 \end{cases}$$

$\delta_p \mathcal{L} = 0 \longrightarrow$ قید (2)