آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه ۵م ۹۹/۷/۲۸

فضای دوگان

$X^* = L(X, \mathbb{R})$ ، $X' = B(X, \mathbb{R}) \leftarrow$ فضای نرم‌دار و باناخ

$$\|f\|_{X'} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\langle f, x \rangle}{\|x\|_X}$$

گزاره: $(\ell^p)' \cong \ell^q$ هرگاه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، $1 \leq p < \infty$

معنی گزاره بالا: ایزومتری $T: \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$ وجود دارد که پوشا است. (به طور طبیعی هر ایزومتری یک به یک نیز هست)

اثبات گزاره (حالت $p=1$) . $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$. برای هر $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ ، تابعک خطی زیر روی ℓ^1 را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(\alpha) := f_\alpha \quad , \langle f_\alpha , x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

نشان می‌دهیم $f_\alpha \in (\ell^1)'$ و $\|f_\alpha\|_{(\ell^1)'} = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$

$$|f_\alpha(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right| \leq \|\alpha\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|\alpha\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \quad f_\alpha \in (\ell^1)' \quad , \quad \|f_\alpha\|_{(\ell^1)'} \leq \|\alpha\|_\infty$$

$$x = e_n \Rightarrow f_\alpha(e_n) = \alpha_n \Rightarrow \|f_\alpha\|_{(\ell^1)'} \geq \frac{|f_\alpha(e_n)|}{\|e_n\|_1} = |\alpha_n|$$

$$\Rightarrow \|f_\alpha\|_{(\ell^1)'} \geq \|\alpha_n\|_\infty$$

درنتیجه ایزومتری $T : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)'$ با ضابطه بالا تعریف شده است. اکنون تنها کافی است نشان دهیم T پوشا است.

اگر $f \in (\ell^1)'$ یک تابعک خطی دلخواه باشد، قرار دهید $\alpha_n = f(e_n)$

$$|\alpha_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|_{(\ell^1)'} \cdot \|e_n\|_{\ell^1} = \|f\|_{(\ell^1)'}$$

$$\Longrightarrow \alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$$

به علاوه $T(\alpha) = f$.

(اثبات حالت $1<p$) :

تمرین- نشان دهید $T: \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$ با ضابطه

$$\langle T(\alpha), x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

یک ایزومتری خوش تعریف است.

نشان می‌دهیم T پوشا است. برای $f \in (\ell^p)'$ قرار می‌دهیم $\alpha_n = \langle f, e_n\rangle$ ، تنها باید نشان دهید $\alpha=(\alpha_n)\in \ell^q$

$$x_n = \begin{cases} |\alpha_n|^q \, \alpha_n^{-1} & \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$X^m = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots) = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \ell^p$$

$$\langle f, X^m\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^q \leq \|f\| \cdot \|X^m\|_{\ell^p}$$

$$\|x^m\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^{q}\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^q \le \|f\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^q\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^q \le \|f\|^{\frac{p}{p-1}}$$

چون m دلخواه است، پس $\alpha \in \ell^q$.

نکته – درحالتی که $p=\infty$ ، تمرین صفحه قبل همچنان درست است و ایزومتری $T: \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ خوش تعریف است. لذا می‌توانیم بگیریم $\ell^1 \subseteq (\ell^\infty)'$ ولی T پوشا نیست. اگر اثبات بالا را تکرار کنیم و $\alpha_n = f(e_n)$ برای $f \in (\ell^\infty)'$.
هرچند $\alpha \in \ell^1$ و تنها تساوی

$$\langle T(\alpha), e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle$$

برقرار است. که نتیجه می‌شود $T(\alpha) = f$ روی $\overline{\mathrm{Span}\{e_n\}_{n\geq 1}}$ ، که این زیرفضای سره ℓ^∞ است.

مثال- نگاشت ایزومتری $T: \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ پوشا نیست.

اگر S را زیرفضای دنباله‌های همگرا بگیریم، نگاشت $f: S \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\langle f, x \rangle = \lim_{n\to\infty} x_n$$

یک نگاشت خطی پیوسته روی S است. فرض کنید بتوانیم f را به صورت پیوسته به ℓ^∞ توسعه دهیم. این نگاشت f در تصویر T قرار ندارد. چون اگر قرار باشد $f = T(\alpha)$ آنگاه

$$\langle f, x \rangle = \sum x_i \alpha_i \qquad \forall x \in \ell^\infty$$

اگر قرار دهیم $x = e_n \in S$ ، آنگاه

$$\alpha_n = \lim_{i\to\infty} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv 0 \Rightarrow T(\alpha) \equiv 0 \quad \times$$

قضیه هان-باناخ

قصدمون این است که یک تابعک پیوسته خطی روی زیرفضای یک فضای نرم‌دار X را به کل فضا توسیع دهیم.

برای نشان دادن این مطلب از لم زرن استفاده می‌کنیم.

لم زرن - یک مجموعه جزئی مرتب که هر زنجیره آن کران پایین (بالا) داشته باشد، آنگاه عضو مینیمال (ماکسیمال) دارد.

تعریف - یک مجموعه M را همراه با رابطه $\leq$ جزئی مرتب گوییم هرگاه

$$(1) \qquad \forall a \in M \qquad a \leq a$$

$$(2) \qquad a \leq b \,,\ b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$$

$$(3) \qquad a \leq b \,,\ b \leq a \ \Rightarrow\ a = b$$

مثال - برای مجموعه A، $M = 2^A$ شامل همه زیرمجموعه‌های A با رابطه جزئی مرتب $\subseteq$ یک مجموعه جزئی مرتب است.

تعریف - $W \subseteq M$ یک زنجیره است، هرگاه هر دو عضو W قابل مقایسه باشند، یعنی

$$\forall a, b \in W, \qquad a \leq b \ \ \text{یا} \ \ b \leq a$$

$x \in M$ را یک کران پایین (کران بالا) برای W گوییم هرگاه

$$x \leq a \qquad \forall a \in W$$

$$(x \geq a \qquad \forall a \in W)$$

عضو مینیمال M (ماکسیمال)، عضو $m \in M$ است که

$$\nexists a \in M \quad a \leq m \implies a = m$$

$$(\nexists a \in M \quad a \geq m \implies a = m)$$

مثال - اگر V یک فضای برداری باشد، مجموعه جزئی مرتب M را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$M = \{ A \subseteq V : \text{مستقل خطی است } A \}$$

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

از طرفی اگر $W = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک زنجیره در M باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in M$ یک کران بالا برای W است.

(تمرین - نشان دهید $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ مستقل خطی است.) بنابر لم زرن M یک عضو ماکسیمال دارد. آن را C بنامید.

ادعا می‌کنیم C یک پایه برای فضای برداری V است. چون $C\in M$ مستقل خطی است. اگر $\operatorname{Span} C \neq V$ و $v \in V \setminus \operatorname{Span} C$ ، آنگاه $C \cup \{v\}$ مستقل خطی است و تناقض دارد با اینکه C عضو ماکسیمال M است.