آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه هشتم ۹۹/۷/۲۱

گزاره- اگر $T\in B(X,Y)$ ، آنگاه $Nul\, T$ یک زیرفضای بسته X است.

اثبات- $Nul\, T = T^{-1}\{0\}$ و بنابر پیوستگی T ، $Nul\,T$ باید بسته باشد.

سؤال- اگر $T\in L(X,Y)$ و $Nul\,T$ در X بسته باشد، آیا T کران‌دار است؟

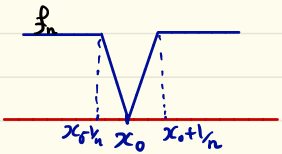
$D: C^1[a,b]\to C[a,b]$ عملگر مشتق باشد، آنگاه $Nul\,D$ شامل همه توابع ثابت است که در $C^1[a,b]$ بسته است.

اما D یک عملگر بی‌کران است.

سؤال- آیا عملگری وجود دارد که فضای پوچ آن بسته نباشد؟

$\delta: C[a,b]\to \mathbb{R}$ با ضابطه $\delta(f)=f(x_0)$ که $a\le x_0\le b$. اگر $C[a,b]$ با نرم انتگرال

باشد، در جلسه پیش دیدیم که δ کران‌دار نیست. $Nul\,\delta=\{f\in C[a,b]:\ f(x_0)=0\}$



$f_n \xrightarrow{\text{نرم انتگرال}} 1$ و $\|f_n-f_m\|_1\le\int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n}dx=\frac{2}{n}\ ,\ m\ge n$

$$T \in B(X,Y) \qquad \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

نکته - $T: X \to Y, \quad S: Y \to Z$

$$ST: X \to Z$$

اگر $T \in B(X,Y)$ و $S \in B(Y,Z)$ آنگاه $ST \in B(X,Z)$ و

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

$\|ST\|$ کوچکترین عدد C است که رابطه $\|STx\|_Z \leq C \|x\|_X$ برقرار است. لذا کافی است ثابت شود

$$\|STx\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X$$

نکته - $1 = \|TT^{-1}\| \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ اگر T وارون پذیر باشد، $\|T\|^{-1} \leq \|T^{-1}\|$

سؤال - $T \in B(X,Y)$ وارون پذیر است، درنتیجه $T^{-1} \in L(Y,X)$. آیا $T^{-1} \in B(Y,X)$ ؟

مثال ـ دنباله‌ی از یکجا به بعد صفر $= S$ با نرم سوپریمم

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \cdots\right)$$

$$\|T\| = 1$$

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3, \cdots) = (x_1, 2y_2, 3y_3, \cdots)$$ کران دار نیست.

قضیه: فضای $B(X,Y)$ باناخ است هرگاه Y باناخ باشد.

اثبات ـ باید نشان دهیم که اگر $\{T_n\}$ دنباله ای از عملگرهای کران دار باشد که با نرم عملگری کوشی است، یعنی

$$\forall \epsilon\ \exists N,\ m,n \geq N : \|T_n - T_m\| < \epsilon \qquad (1)$$

آنگاه عملگر $T \in B(X,Y)$ وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

در ابتدا عملگر T را تعریف می‌کنیم. برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_n x\}$ در Y کوشی است. زیرا

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_X \underset{(1)}{\leq} \epsilon \|x\|_X$$

چون Y باناخ است، درنتیجه دنباله $\{T_n x\}$ در Y همگرا است. حد آن را با Tx نشان می‌دهیم.

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \qquad \forall x \in X$$

برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم:

(1) $T: X \to Y$ خطی است.

(2) $T \in B(X,Y)$ کران‌دار است.

(3) $\|T_n - T\| \to 0$

اثبات (1):

$$T(rx) := \lim_{n\to\infty} T_n(rx) = \lim_{n\to\infty} rT_n x = r\lim_{n\to\infty} T_n x = rTx$$

$$T(x+y) := \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + T_n y = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty$$

اثبات (2)

$$\|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq C\|x\|_X$$

چون $\{T_n\}$ کوشی است پس کران‌دار است و $\|T_n\| \leq C$ برای هر n.

اثبات (3) :

$$\forall \epsilon \ \exists N,\ n \geq N, \quad \|T_n - T\| < \epsilon$$

$$\|T_n x - Tx\|_Y < \epsilon \|x\|_X \qquad \forall x \neq 0$$

بنا بر (1) برای $\epsilon/2$ به جای ϵ خواهیم داشت :

$$\|T_n x - T_m x\|_Y < \epsilon/2 \|x\|_X \qquad \forall\, 0 \neq x \in X$$

اکنون اگر $m \to \infty$، نتیجه خواهد شد که

$$\|T_n x - Tx\|_Y \leq \frac{\epsilon}{2} \|x\|_X < \epsilon \|x\|_X$$

نکته - توسعه پیوسته عملگرها: فرض کنید X زیرفضای چگال Y باشد، به علاوه اگر Z فضای برداری باناخ باشد و $T: X \to Z$ پیوسته باشد، آنگاه $\tilde{T} \in B(Y, Z)$ وجود دارد که

$$\tilde{T}|_X = T$$

درضمن $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

ایده اثبات - $\tilde{T}$ را به این صورت می‌سازیم. برای هر $y \in Y$ دنباله $x_n \in X$ پیدا می‌کنیم که $x_n \xrightarrow{Y} y$. چون X در Y چگال است، این دنباله وجود دارد.

$$\tilde{T}y := \lim_{n\to\infty} T x_n$$

باید موارد زیر اثبات شوند:

(۱) $\{Tx_n\}$ در Z کوشی است و در نتیجه همگرا.

(۲) اگر $z_n \in X$ دنباله دیگری باشد که به y همگرا است، آنگاه $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tz_n$ و در نتیجه $\tilde{T}$ خوش‌تعریف است.

(۳) برای هر $x \in X$، $\tilde{T}x = Tx$. این مطلب از (۲) نتیجه خواهد شد.

(۴) $\tilde{T} \in B(Y,Z)$.

(۵) $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

تابعکهای خطی

اگر X فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، $X^*=L(X,\mathbb{R})$ یا $X^*=L(X,\mathbb{C})$ (بسته به میدان)

فضای برداری) فضای تابعکهای خطی روی X نامیده می‌شود. همچنین $B(X,\mathbb{C})$ یا $X'=B(X,\mathbb{R})$.

پس برای هر $f\in X'$ می‌توانیم نرم f را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\|f\|_{X'} := \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1}|f(x)|$$

X' را فضای دوگان X می‌نامیم. به طور مشابه X^* را دوگان جبری X است.

X' زیرفضای خطی X^* است که با نرم $\|\cdot\|_{X'}$ نرم‌دار است. اعضای X' تابعکهای پیوسته روی X هستند.

گزاره ـ X' باناخ است مستقل از آنکه X باناخ باشد یا نه.

اثبات ـ این گزاره نتیجه قضیه قبل است که $B(X,Y)$ باناخ است هرگاه Y باناخ باشد.

اگر $\dim X < \infty$ ، آنگاه $X' = X^*$. (گزاره‌ای از جلسه قبل که $L(X,Y) = B(X,Y)$ وقتی بعد X متناهی است.)

گزاره - اگر $\dim X < \infty$ ، آنگاه $\dim X' = \dim X$.

اثبات - اگر $X = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ، آنگاه $e_i^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی که روی اعضای پایه X به این صورت تعریف می‌شود:

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

آنگاه می‌توان نشان داد که $\langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$ یک پایه برای X^* است. (اثبات - تمرین)

نکته - در حالت کلی، همیشه تابعک خطی صفر روی X تعریف می‌شود، که پیوسته نیز هست. پس $0 \in X' \subseteq X^*$. در نتیجه $X' \neq \phi$.

سؤال - آیا $X' \neq \{0\}$ یا $X^* \neq \{0\}$ وقتی $\dim X = \infty$ ؟

اگر $\{e_i\}_{i \in I}$ یک پایه (هامل) برای X باشد، آنگاه $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ به سادگی می‌توان آن را به X توسیع خطی داد.

لذا $e_i^* \in X^*$. درواقع $\{e_i^*\}_{i \in I}$ یک پایه (هامل) برای X^* است.

اثبات $X' \neq \{0\}$ درجلسات آینده به کمک زرن بیان خواهد شد.

مثال - $X = \ell^2$ ، $\alpha = (\alpha_i)_i \in \ell^2$ دلخواه باشد، $f \in (\ell^2)'$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

بنابر نامساوی کوشی - شوارتز (یا هولدر)

$$\langle f, x \rangle = \sum_i \alpha_i x_i \leq \left(\sum_i |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$= \|\alpha\|_{\ell^2} \cdot \|x\|_{\ell^2} \implies f \in X', \ \|f\|_{X'} \leq \|\alpha\|_{\ell^2}$$

از طرفی

$$f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots) = \sum_i |\alpha_i|^2 = \|\alpha\|_{\ell^2}^2$$

$$\implies \|f\|_{X'} = \|\alpha\|_{\ell^2}$$

مثال- شناسایی تابعک‌ها (شکل کلی تابعک)، اگر $\alpha \in \ell^q$ ، آنگاه $f \in (\ell^p)'$ که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ،

$$\langle f, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

به‌علاوه $\|\alpha\|_{\ell^q} = \|f\|_{(\ell^p)'}$.

مثال- $X = C[a,b]$ با نرم سوپریمم، $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt \in X'$.

$$\|f\|_{X'} = b-a$$

اگر $C[a,b]$ را با نرم انتگرال درنظر بگیریم، آنگاه $\|f\|_{X'} = 1$.