آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه هشتم   ۹۹/۷/۱۹

عملگرهای خطی

اگر X و Y دو فضای برداری باشند، تابع $T: X \longrightarrow Y$ را عملگر خطی گوییم، هرگاه

- $T(rx) = rT(x) \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \ \forall x \in X$
- $T(x+y) = T(x) + T(y)$

- اگر T خطی باشد، باید $T(0_X) = 0_Y$.

- در بعضی مواقع $T(x)$ را به صورت Tx یا $\langle T, x \rangle$ نمایش بدهیم.

مثال- $0: X \longrightarrow Y$ که $\langle 0, x \rangle = 0_Y$ به وضوح عملگر خطی است.

$I: X \longrightarrow X$ که $Ix = x$ نیز یک عملگر خطی است.

مثال- $D: P \longrightarrow P$ که P فضای برداری همه چندجمله‌ایها است

$$D(p) = p'$$

$$D(r.p) = (r.p)' = r.p' = r.D(p)$$

$$D(p+q) = (p+q)' = p' + q' = D(p) + D(q)$$

مثال- $T: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

$$T(f)(t) = \int_a^t f(s)\,ds$$

مثال- $R: \ell^p \longrightarrow \ell^p$ عملگر شیفت به راست

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

و $L: \ell^p \longrightarrow \ell^p$ شیفت به چپ $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$

تعریف- $\operatorname{Nul} T = \{x \in X : T(x) = 0_Y\}$ یک زیرفضای خطی X است.

$\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in X\}$ یک زیرفضای خطی Y است.

عملگر خطی $T : X \to Y$ را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه $S : Y \to X$ وجود داشته باشد که

$$I_Y = T \circ S : Y \longrightarrow Y$$

$$I_X = S \circ T : X \longrightarrow X$$

S را وارون T گوییم و با $S = T^{-1}$ نشان می‌دهیم.

شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری T، این است که یک به یک و پوشا باشد. یا به طور معادل

$$\operatorname{Nul} T = \{0_X\} \quad , \quad \operatorname{Im} T = Y$$

نکته- اگر $T : X \to Y$ و $S : Y \to Z$ دو عملگر خطی وارون‌پذیر باشند، آنگاه $S \circ T : X \longrightarrow Z$ وارون‌پذیر است و

$$(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$$

مثال- D عملگر مشتق است.

$$Nul(D)=\{p : D(p)=p'=0\}$$

$$=\{\text{چندجمله‌ای‌های ثابت}\}=\mathbb{R}$$

مثال- T عملگر انتگرال باشد،

$$Nul\,T=\{f : R(f)(t)=\int_a^t f(s)\,ds=0,\ \forall\, a\le t\le b\}$$

$$=\{0\}$$ $\Longrightarrow$ عملگر انتگرال یک‌به‌یک است

عملگر انتگرال پوشا نیست. زیرا بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع به صورت $\int_a^t f(s)\,ds$ مشتق‌پذیر هستند. درنتیجه $Im\,T\neq C[a,b]$. از طرفی به راحتی می‌توان دید که

$$D\circ T=I$$

مثال- R و L عملگرهای شیفت به راست و چپ باشند.

$$L\circ R = I \quad , \quad R\circ L \neq I$$

تعریف- عملگر خطی $T: X \to Y$ را کراندار گوییم هرگاه ثابت $c>0$ وجود داشته باشد که

$$\|Tx\|_Y \leq c\,\|x\|_X$$

مثال- اگر نرم سوپریمم در بازه $[0,1]$ را برای فضای چندجمله‌ای‌های P درنظر بگیریم، عملگر مشتق D کراندار نیست. اگر قرار دهیم $P_n(t)=t^n$ ، $\|P_n\|_\infty = 1$ و

$$\|TP_n\|_\infty = \|P_n'\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1}|n t^{n-1}| = n$$

درنتیجه عملگر مشتق بی‌کران است.

مثال - اگر روی $C[a,b]$ نرم سوپریمم بگذاریم ، عملگر انتگرال کراندار است

$$(Tf)(t) = \int_a^t f(s)\,ds$$

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{a\le t\le b} \left| \int_a^t f(s)\,ds \right|$$

$$\le \sup_{a\le t\le b} \int_a^t \|f\|_\infty\,ds \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty$$

$$\|Tf\| \le C\,\|f\| \Rightarrow$$ T کراندار است .

مثال - $L : \ell^p \to \ell^p$ شیفت به چپ باشد ،

$$L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

$$\|L(x_1,x_2,\dots)\|_p = \|(x_2,x_3,\dots)\|_p = \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

گزاره- اگر $T: X \longrightarrow Y$ خطی باشد، $\dim X < \infty$ آنگاه T کراندار است.

اثبات- $X = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ،

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \Rightarrow Tx = x_1 Te_1 + \cdots + x_n Te_n$$

$$\|Tx\|_Y \leq |x_1| \cdot \|Te_1\|_Y + \cdots + |x_n| \cdot \|Te_n\|_Y$$

$$\leq C\,[\,|x_1| + \cdots + |x_n|\,] \quad , \qquad C = \max_{1 \leq i \leq n} \|Te_i\|_Y$$

$$\leq C C_0 \|x\|_X$$

گزاره قبل

مثال- $T: S \to S$ که S دنباله های از یک جا به بعد صفر است با نرم سوپریمم.

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \cdots)$$

یک عملگر بی‌کران است.

$$Te_n = n e_n$$

$$\|Te_n\|_\infty = n \quad , \quad \|e_n\|_\infty = 1$$

مثال- $T: C[a,b] \to C[a,b]$

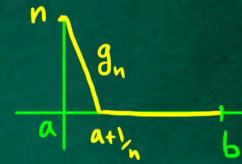
$$(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s)\, ds$$

T کران دار است هرگاه

$$\sup_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)|\, ds < \infty$$

مثال- $\delta : C[a,b] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\delta(f) = f(a)$. اگر $C[a,b]$ با نرم سوپریمم درنظر بگیریم، δ کران‌دار است ولی اگر نرم فضا نرم انتگرالی باشد، δ بی‌کران است.

$$|\delta(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty$$



$$\delta(g_n) = n \quad , \quad \|g_n\|_1 = \int_a^b |g_n(t)|\,dt = 1/2$$

تعریف- فضای همه عملگرهای خطی از X به Y را با نماد $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

$L(X,Y)$ یک فضای برداری است با جمع برداری $(T+S)(x) = Tx + Sx$

و ضرب اسکالر $(r.T)(x) = r.Tx$

همه عملگرهای خطی کران‌دار را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم که یک زیرفضای $L(X,Y)$ است (چرا؟)

روی $B(X,Y)$ نرم زیر را تعریف می‌کنیم :

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

کوچکترین ثابت c که توصیف کران‌داری را می‌دهد

$$= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y$$

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \left\|\frac{1}{\|x\|_X} Tx\right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\cdot\|Tx\|_Y$$

سؤال: چرا $\|T\|$ یک نرم است؟

۱. توصیف کران‌داری تضمین می‌کند که $\|T\|$ یک عدد حقیقی است.

۲. اگر $\|T\|=0$ $\Leftarrow$ $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}=0$ $\Leftarrow$ $\|Tx\|_Y$ برای هر $x\in X$ ، $\Leftarrow$ $T=0$

$$\|rT\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(rT)x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|r.Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$ ٣

$$= \sup_{x\neq 0} |r|.\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = |r|.\|T\|$$

$$\|T+S\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|(T+S)(x)\|_Y$$ ٤

$$= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx+Sx\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y$$

$$\leq \|T\| + \|S\|$$

عملگر خطی $T \in L(X,Y)$ در نقطه x_0 پیوسته است، هرگاه مشابه دو فضای متریک دیگر،

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad Tx_n \to Tx_0$$

یا به طور معادل

$$\forall \epsilon\ \exists \delta : \quad \|x - x_0\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - Tx_0\|_Y < \epsilon$$

پیوستگی یک عملگر خطی در یک نقطه معادل پیوستگی در همه نقاط است.

T در صفر پیوسته است $\Leftrightarrow \left(\forall \{x_n\} \text{ s.th. } x_n \to 0 \Rightarrow Tx_n \to T0 = 0 \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \{x_n\} \text{ s.th. } x_n + x_0 \to x_0 \Rightarrow T(x_n + x_0) = Tx_n + Tx_0 \to Tx_0 \right)$$

$\Leftrightarrow$ T در x_0 پیوسته است.

گزاره - عملگر خطی $T: X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر $T \in B(X,Y)$.

اثبات - اگر $T \in B(X,Y) \Leftarrow \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$

$$\Rightarrow \quad \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

$$\forall \epsilon \ \exists \delta := \frac{\epsilon}{\|T\|} \ , \ \|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X < \epsilon$$

$\Rightarrow$ T در صفر پیوسته است. $\Rightarrow$ T همه جا پیوسته است.

برعکس اگر T در صفر پیوسته باشد برای $\epsilon = 1$، مقدار $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Tx\|_Y < \epsilon = 1$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0}\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left\|\frac{2}{\delta}\,T\Big(\underbrace{\frac{\delta x}{2\|x\|_X}}_{\text{در داخل گوی به شعاع } \delta \text{ است}}\Big)\right\|_Y$$

$$= \frac{2}{\delta}\sup_{x\neq 0}\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$\leq \frac{2}{\delta}$$

نتیجه- اگر $T\in L(X,Y)$, $\dim X<\infty$ ، آنگاه T پیوسته است.