آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه ششم ۹۹/۷/۱۴

گزاره - اگر V فضای برداری بعد متناهی باشد، هر دو نرم روی آن هم‌ارز هستند.

اثبات - $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \Rightarrow \|x\|_1 := |a_1| + \dots + |a_n|$$

اگر $\|\cdot\|_*$ یک نرم دیگر باشد، نشان می‌دهیم

$$c_0 \|x\|_1 \le \|x\|_* \le c_1 \|x\|_1$$

گام اول

$$\|x\|_* = \|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\|_* \le |a_1| \cdot \|e_1\|_* + \dots + |a_n| \cdot \|e_n\|_*$$

$$\le \left(\max_{1 \le i \le n} \|e_i\|_*\right) \left[|a_1| + \dots + |a_n|\right]$$

$$= c_1 \|x\|_1 \qquad (1)$$

<u>گام دوم</u>: تابع $\varphi(x) = \|x\|_* : V \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است در توپولوژی V با $\|\cdot\|_1$ بدست آمده است. یعنی اگر $\|x_m - x\|_1 \to 0$ آنگاه باید

$$\|x_m\|_* = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) = \|x\|_*$$

بنابر نامساوی (1) داریم

$$\underbrace{\Big| \|x_m\|_* - \|x\|_* \Big|}_{\text{نامساوی مثلث}} \leq \|x_n - x\|_* \leq C_1 \|x_m - x\|_1 \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \|x_m\|_* \longrightarrow \|x\|_*$$

<u>گام سوم</u>: گوی واحد $B = \{x \in V : \|x\|_1 = 1\}$ با توپولوژی $\|\cdot\|_1$ فشرده است.

یعنی اگر $B \supseteq \{x_m\}$ آنگاه زیردنباله‌ای از آن وجود دارد که با $\|\cdot\|_1$ همگرا است.

$$x_m = a_1^m e_1 + \cdots + a_n^m e_n \in B$$

(2) $$1 = \|x_m\|_1 = |a_1^m| + \cdots + |a_n^m|$$

دنباله $\{a_1^m\}_{m=1}^\infty$ کران‌دار است و در نتیجه زیردنباله‌ای از آن همگرا است

$$a_1^{m_{i,1}} \longrightarrow \bar{a}_1$$

دنباله $\{a_2^{m_{i,1}}\}_{i=1}^\infty$ کران‌دار است و زیردنباله‌ای همگرا دارد.

$$a_2^{m_{i,2}} \longrightarrow \bar{a}_2$$

به همین ترتیب دنباله $m_i \to \infty$ وجود دارد که

$$a_j^{m_i} \longrightarrow \bar{a}_j \qquad 1 \le j \le n$$

نشان می‌دهیم $x_{m_i} \longrightarrow \bar{x} = \bar{a}_1 e_1 + \cdots + \bar{a}_n e_n$ (همگرایی در $\|\cdot\|_1$)

$$\| x_{m_i} - \bar{x} \|_1 = \| (a_1^{m_i} - \bar{a}_1) e_1 + \cdots + (a_n^{m_i} - \bar{a}_n) e_n \|_1$$

$$= |a_1^{m_i} - \bar{a}_1| + \cdots + |a_n^{m_i} - \bar{a}_n|$$

$$\longrightarrow 0$$

به علاوه اگر از رابطه (2) حد بگیریم، نتیجه می‌شود که

$$1 = |a_1^{m_i}| + \cdots + |a_n^{m_i}| \longrightarrow |\bar{a}_1| + \cdots + |\bar{a}_n|$$

$$\Rightarrow \quad \|\bar{x}\|_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \in B$$

گام چهارم :

از دو گام قبلی نتیجه می‌شود که $x^* \in B$ وجود دارد بطوری که

$$0 < C_0 = \|x^*\| = \varphi(x^*) = \min_{x \in B} \varphi(x)$$

چون $0 \notin B$

$$\Rightarrow \quad C_0 \le \|y\|_* \qquad \forall y \in B$$

اکنون برای بردار $0 \neq x \in V$ دلخواه می‌دانیم که

$$y = \frac{x}{\|x\|_1} \in B$$

$$\Rightarrow \quad C_0 \le \|y\|_* = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_* = \frac{\|x\|_*}{\|x\|_1}$$

$$\Rightarrow \quad C_0 \|x\|_1 \le \|x\|_*$$

نکته - اگر V یک فضای برداری دلخواه با بعد n باشد، آنگاه تابع

$$T : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (V, \|\cdot\|_1)$$

با ضابطه

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

یک ایزومتری بین دو فضای برداری ارائه می‌کند. T یک همسانریختی بین دو فضای متریک است و

در نتیجه خواص توپولوژیک $\mathbb{R}^n$ به V منتقل می‌گردد. مثلاً هر مجموعه کراندار و بسته در V نسبت به توپولوژی

$\|\cdot\|_1$ فشرده است. گزاره قبل نشان می‌دهد که مجموعه‌های فشرده روی فضای برداری با بعد متناهی

به نرم بستگی ندارد. یعنی هر مجموعه کراندار و بسته با هر نرم $\|\cdot\|_*$ فشرده است. در حالت خاص

$B = \{x \in V : \|x\|_* = 1\}$ در توپولوژی القایی از $\|\cdot\|_*$ فشرده است.

همچنین خاصیتِ تام بودن از $\mathbb{R}^n$ به V به ارث می‌رسد. یعنی هر فضای برداری بعدمتناهی با هر نرم دلخواه

تام است. (چرا؟)

گزاره - هر زیرفضای بعدمتناهی از یک فضای برداری نرم‌دار، بسته است.

سؤال - آیا گوی واحد در فضای برداری بعدنامتناهی نیز فشرده است؟

مثال - در ℓ^p ، $1 \le p \le \infty$ ، بردارهای $e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{ام}}, 0, \dots)$ در گوی واحد قرار دارند.

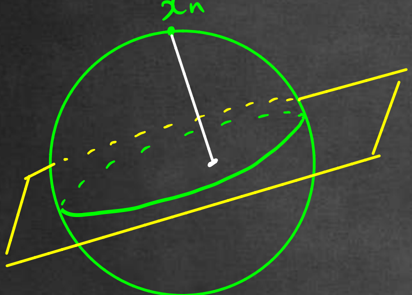
$$\|e_n\|_p = 1 \quad , \quad \|e_n - e_m\| = \begin{cases} 2^{1/p} & p < \infty \\ 1 & p = \infty \end{cases}$$

در نتیجه دنباله $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله همگرا ندارد.

قضیه - اگر V یک فضای برداری نرم‌دار بعد نامتناهی باشد، کره واحد فشرده نیست.

اثبات - دنباله $\{x_n\}$ را در کره واحد پیدا می‌کنیم، به طوری که $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$.

برای پیدا کردن این دنباله، فرض کنید $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ با خاصیت بالا وجود داشته باشد. بردار x_n روی کره واحد پیدا می‌کنیم



$$\operatorname{dist}\left(x_n, \operatorname{Span}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle\right) \geq \frac{1}{2}$$

وجود x_n به کمک لم ریز اثبات می‌شود.

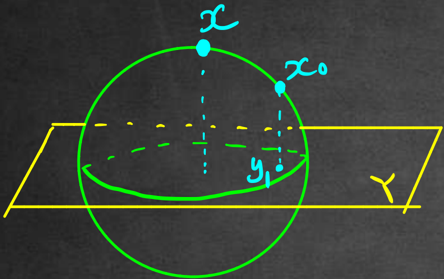
تعریف - اگر V فضای برداری نرم‌دار باشد و $A \subseteq V$ (زیرمجموعه)

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

لم ریس - اگر V فضای برداری نرم‌دار باشد و Y زیرفضای سره بعد متناهی آن، آنگاه برای هر $0<\theta<1$

بردار $x\in V$ وجود دارد که $\|x\|=1$ و

$$\operatorname{dist}(x,Y)\geq\theta$$



اثبات - $Y\neq V \Rightarrow \exists x_0\in V\setminus Y$

$$0<\alpha=\operatorname{dist}(x_0,Y)=\inf_{y\in Y}\|x_0-y\|$$

Y بسته است زیرا $\dim Y<\infty$

$$\Rightarrow \exists y_1\in Y,\quad \alpha\leq\|x_0-y_1\|\leq\frac{\alpha}{\theta}$$

$$x:=\frac{x_0-y_1}{\|x_0-y_1\|},\qquad \|x\|=1$$

اگر $y \in Y$ دلخواه باشد،

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_1}{\|x_0 - y_1\|} - y \right\|$$

$$= \left\| \frac{x_0}{\|x_0 - y_1\|} - \tilde{y} \right\| \qquad \tilde{y} = \frac{y_1}{\|x_0 - y_1\|} + y \in Y$$

$$= \frac{1}{\|x_0 - y_1\|} \left\| x_0 - \tilde{y} \cdot \|x_0 - y_1\| \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x_0 - y_1\|} \|x_0 - y^*\| \qquad y^* = \tilde{y} \cdot \|x_0 - y_1\| \in Y$$

$$\geq \frac{\theta}{\alpha} \cdot \alpha = \theta$$

تمرین - با یک مثال نقض نشان دهید، لم ریس برای $\theta=1$ درست نیست.

سؤال - هر فضای برداری X باناخ با بعد نامتناهی لااقل یک زیرفضا دارد که بسته نیست.

پاسخ - اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که در قضیه قبل ساختیم، آنگاه $Span\langle x_n\rangle$ بسته نیست.

$$0<\alpha<1 \,, \quad y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i x_i \xrightarrow{n\to\infty} a_1x_1+\cdots+a_mx_m$$

$$dist\left(\alpha^{m+1}x_{m+1}+\alpha^{m+2}x_{m+2}+\cdots+\alpha^n x_n \,,\, Span\langle x_1,\ldots,x_m\rangle\right)$$

$$\geq dist\left(\alpha^{m+1}x_{m+1} \,,\, Span\langle x_1,\ldots,x_m\rangle\right)-\|\alpha^{m+2}x_{m+2}+\cdots\|$$

$$\geq \frac{\alpha^{m+1}}{2}-\frac{\alpha^{m+2}}{1-\alpha}=\alpha^{m+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)>0$$