آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه پنجم ۹۹/۷/۱۲

فضای برداری باناخ : یک فضای برداری نرم دار است که نسبت به متر القایی از آن نرم یک فضای متریک تام است.

مثال - $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ ، ℓ^p ، ℓ^∞ فضای باناخ هستند. $C[a,b]$ با نرم سوپریمم باناخ است ولی با نرم $\|\cdot\|_p$ باناخ نیست.

سؤال: اگر V فضای برداری باناخ باشد، آیا هر زیرفضای آن نیز این ویژگی را دارد؟

جواب - زیرفضا تام است $\Longleftrightarrow$ بسته باشد

مثال - در ℓ^∞ زیرفضای دنباله‌هایی که از یکجا به بعد صفر بسته نیست.

$$X^n = \left(1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

$$X^n \xrightarrow{\ell^\infty} \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\right) = \bar{X}$$

$$\|\bar{X} - X^n\|_\infty = \left\|\left(0, \dots, 0, \tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+2}, \dots\right)\right\|_\infty = \tfrac{1}{n+1} \to 0$$

مثال- $M=\{e_n\}_{n\geq 1}$ که e_n دنباله‌ای است که در جایگاه n-ام برابر یک و بقیه اعضای دنباله صفر هستند.

$\operatorname{Span} M =$ دنباله‌های از جایی به بعد صفر

$\operatorname{Span} M \neq \ell^p$ اما $\overline{\operatorname{Span} M} = \ell^p$. (گزاره‌ای در جلسه دوم). لذا $\operatorname{Span} M$ نمی‌تواند بسته باشد.

سؤال- اگر V یک فضای برداری نرم‌دار باشد و W یک زیرفضای با بعد متناهی آن باشد، آنگاه W بسته است.

سؤال- اگر V فضای برداری باناخ با بعد نامتناهی باشد، یک زیرفضای از آن وجود دارد که بسته نیست.

تعریف ـ V فضای برداری نرم دار است و $\{v_1, v_2, \dots\}$ یک دنباله ای از بردارها است.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ به بردار $\bar{v} \in V$ همگرا گوییم هرگاه برای

$X_m = \sum_{n=1}^{m} v_n = v_1 + \cdots + v_m$ ، دنباله X_m به $\bar{v}$ همگرا باشد.

$$\| X_m - \bar{v} \| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad m \to \infty$$

آزمون همگرایی : اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \| < \infty$ (به عنوان یک سری عددی) همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

در فضای باناخ V همگرا است.

$$\| X_M - X_N \| = \| \sum_{n=N+1}^{M} v_n \| \underset{\text{نامساوی مثلث}}{\leq} \sum_{n=N+1}^{M} \| v_n \| \underset{\text{وقتی } M,N \text{ به اندازه کافی بزرگ باشند}}{<} \epsilon \Rightarrow \{X_M\} \text{ کوشی است.}$$

تعریف- مجموعه M را <u>پایه‌ی شاودر</u> برای فضای برداری V می‌نامیم، هرگاه M مستقل خطی باشد و

$$\overline{\operatorname{Span} M} = V$$

(دقت کنید پایه‌ی شاودر با مفهوم پایه‌ی فضای برداری (به معنای جبر خطی یا Hamel) تفاوت دارد.)

اگر $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ،

$$\operatorname{Span} M = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i e_i \ : \ r_i \in \mathbb{R} \right\}$$

سوال: آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\overline{\operatorname{Span} M} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i e_i \ : \ r_i \in \mathbb{R} \ , \ \text{سری داده شده همگرا باشد} \right\}$$

تذکر- اگر فضای برداری V یک پایه‌ی شاودر داشته باشد، حتماً جداپذیر است.

مثال: $e_n \in \ell^\infty$ دنباله ای که قبلاً تعریف کردیم بگیرید.

$\text{Span}\ M =$ دنباله‌های از یک جا به بعد صفر

$\overline{\text{Span}\ M} =$ دنباله‌های همگرا به صفر

$$X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\quad x_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists N,\ n \ge N,\ |x_n| < \epsilon$$

$$X^m = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m \xrightarrow{?} X$$

$$\| X^m - X \|_\infty = \| (0,\dots,0,x_{m+1},x_{m+2},\dots) \|_\infty = \sup_{i \ge m+1} |x_i|$$

اگر $m \ge N$ آنگاه $\| X^m - X \|_\infty < \epsilon$.

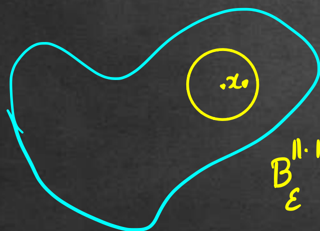
برعکس اگر $Y_m \in \text{Span}\ M$ که $Y_m \xrightarrow{\ell^\infty} Y = (y_n)_{n\ge 1}^{\infty}$ آنگاه $y_n \to 0$. (اثبات ـ تمرین)

تعریف- در فضای برداری X دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ تعریف شده اند. آنها را هم ارز گوییم هرگاه ثابتهای c_0 و $c_1 > 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\forall v\in X,\quad c_0\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le c_1\|v\|_2$$

بدیهی است که رابطه بالا یک رابطه هم ارزی است.

به علاوه توپولوژی القایی از نرمهای هم ارز یکسان است. یعنی اگر $U\subseteq X$ در توپولوژی القایی از $\|\cdot\|_1$ باز باشد، آنگاه در توپولوژی القایی از $\|\cdot\|_2$ نیز باز است.



$\forall x_0\in U\ \exists \varepsilon>0$

$$B_{\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}(x_0)=\{x : \|x-x_0\|_1<\varepsilon\}\subseteq U$$

U باز، هم ارزی $\Longrightarrow\quad B_{\varepsilon/c_1}^{\|\cdot\|_2}(x_0)\subseteq B_{\varepsilon}^{\|\cdot\|_1}(x_0)\subseteq U$

گزاره - اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، هر دو نرم هم‌ارز هستند.

اثبات - $\{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه برای V بگیرید. برای هر $x \in V$ نمایش یکتای

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

وجود دارد. رابطه $\|x\|_1 := |a_1| + \dots + |a_n|$ یک نرم روی فضای V است. (تمرین)

حال اگر $\|x\|_*$ یک نرم دلخواه روی V باشد، نشان می‌دهیم

$$c_0 \|x\|_1 \le \|x\|_* \le c_1 \|x\|_1$$

در این صورت هر دو نرم دلخواه هم‌ارز خواهند بود (چرا؟)

$$\|x\|_* = \|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\|_* \underset{\text{نامساوی مثلث}}{\le} |a_1| \|e_1\|_* + \dots + |a_n| \|e_n\|_* \le (|a_1| + \dots + |a_n|) \times \max_{1 \le i \le n} \|e_i\|_*$$