آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه چهارم ۹۹/۷/۷

فضای برداری

$$(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$$

بردارها

میدان عموماً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$

جمع برداری

ضرب اسکالر

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$(V, +)$ یک گروه جابجایی است.

$$u, v \in V \mapsto u + v \in V$$

$$\exists\, 0 \in V, \quad u + 0 = u$$

$$\forall u \in V, \ \exists\, v \,(= -u) \text{ s.th. } u + v = 0$$

$$\forall u, v \in V, \quad u + v = v + u$$

$$\forall u, v, w \in V \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$$

$$(r, u) \longmapsto r.u$$

$$\forall r,s \in \mathbb{F},\ u \in V \qquad r.(s.u) = (rs).u \quad , \quad \underbrace{(r+s)}_{\text{جمع در میدان } \mathbb{F}} \underbrace{.}_{\text{ضرب اسکالر}} u = r.u \underbrace{+}_{\text{جمع برداری}} s.u$$

$$\underbrace{1}_{\text{عنصر همانی میدان}} \quad , \quad 1.u = u$$

$$\forall r \in \mathbb{F},\ u,v \in V \qquad r.(u+v) = r.u + r.v$$

مثال- $\mathbb{R}^n$ به معنای n تایی مرتب یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.

همچنین $\mathbb{C}^n$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ است.

مثال- فضای توابع پیوسته $C[a,b]$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است. هر تابع پیوسته $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک بردار محسوب می‌شود.

جمع برداری: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

ضرب اسکالر: $(r \cdot f)(x) := \underbrace{r\,f(x)}_{\text{ضرب دو عدد حقیقی}}$

مثال- $\ell^p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$

جمع برداری $\underbrace{(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}}_{\text{جمع برداری}} := (\underbrace{x_n + y_n}_{\text{جمع در } \mathbb{C}})_{n=1}^{\infty}$

این جمع برداری خوش تعریف است به دلیل نامساوی مینکوفسکی

ضرب اسکالر $r \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} := (\underbrace{r x_n}_{\text{ضرب در اعداد مختلط}})_{n=1}^{\infty}$

$$r \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots) := (r x_1, r x_2, r x_3, \dots)$$

تعریفِ- اگر V فضای برداری باشد، $W \subseteq V$ زیرِفضای V نامیده می‌شود هرگاه نسبت به جمع وضرب اسکالر بسته باشد. درواقع بایدِ $(W, +, \cdot)$ یکِ فضای برداری باشد.

مثال- $W_N = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p : x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 0 \}$ درواقع W_N همان $\mathbb{C}^N$ است.

به‌وضوح W_N زیرِفضای ℓ^p است. (چرا؟)

مثال- $V = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p : \exists N ,\ n \geq N ,\ x_n = 0 \}$ درواقع $V = \bigcup_{N=1}^{\infty} W_N$

به‌وضوح V زیرِفضای ℓ^p است.

مثال- $\ell^p \subseteq \ell^{\infty}$ زیرِفضای ℓ^{∞} است. همچنینِ $\ell^p \subseteq \ell^q$ اگر $p \leq q$.

تعریف- اگر $v_1, \dots, v_n \in V$ و $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{F}$ آنگاه بردار

$$r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + \dots + r_n \cdot v_n$$

یک ترکیب خطی از بردارهای $v_1, \dots, v_n$ است.

اگر $M \subseteq V$ (زیرمجموعه نه لزوماً زیرفضا) آنگاه

$$\operatorname{Span} M = \left\{ \begin{array}{l} \text{همه ترکیب‌های خطی که به وسیله هر تعداد متناهی} \\ \text{عضو } M \text{ به دست می‌آید} \end{array} \right\}$$

به وضوح $\operatorname{Span} M$ یک زیرفضای برداری V است. در حقیقت $\operatorname{Span} M$ کوچکترین زیرفضای V است که شامل است. یعنی اگر W یک زیرفضای V باشد که $M \subseteq W$، آنگاه $\operatorname{Span} M \subseteq W$.

مثال- $e_n = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ که $x_k = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$.

اگر $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$، آنگاه $\operatorname{Span} M = \{\text{همه دنباله‌های که از یکجا به بعد صفر هستند}\}$

تعریف ـ بردارهای $v_1, \dots, v_n$ را مستقل خطی گوییم، هرگاه برای هر ترکیب خطی

$$r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0$$

نتیجه شود $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$. اگر M یک مجموعه ناتناهی از بردارها باشد، مستقل خطی گفته می‌شود

هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از M مستقل خطی باشد. اگر M مستقل خطی نباشد، آن را وابسته خطی گوییم.

در این صورت باید تعداد متناهی بردار $v_1, \dots, v_n \in M$ با ضرایب $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{F}$ که لااقل یکی از آنها ناصفر است

وجود دارد به طوری که $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0$.

مثال ـ بردارهای $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ در سالتیل مستقل خطی هستند.

$$x = r_1 e_{n_1} + \dots + r_k e_{n_k} = 0$$

$$x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \qquad x_i = \begin{cases} r_j & i = n_j \quad j = 1, \dots, k \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases}$$

تعریف- M را پایه (Hamel) فضای برداری V گوییم هرگاه مستقل خطی بوده و $\operatorname{Span} M = V$.

هر فضای برداری یک پایه دارد.

$$\mathcal{A} = \{ M \subseteq V \ : \ \operatorname{Span} M = V \}$$

$$M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subseteq M_2$$

به کمک لم زرن $\mathcal{A}$ کوچکترین عضو دارد. کافی است نشان دهیم این کوچکترین عضو مستقل خطی است.

مثال- مجموعه $M = \{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ در مثال قبل تعریف شده، هر چند مستقل خطی است ولی پایه ℓ^p نیست.

زیرا $\ell^p \neq \operatorname{Span} M$.

فضای برداری نرم دار

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty)$$

در واقع نرم طول هر بردار را در فضای برداری بیان می‌کند. هر نرم روی یک فضای برداری چهار خاصیت زیر را باید داشته باشد.

(1) $\|v\| \geq 0$

(2) $v = 0 \iff \|v\| = 0$

(3) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$

(4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

این خواص تضمین می‌دهد که $d(u,v) = \|u-v\|$ یک متر روی فضای برداری V تعریف می‌کند.

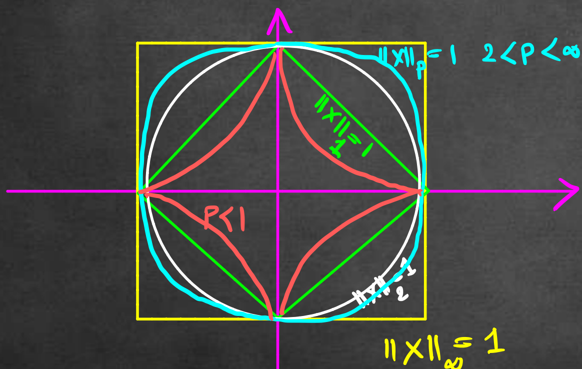
مثال- روی $\mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n$ نرم‌های زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

$$X = (x_1 , \dots , x_n)$$

$$\|X\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

برای $p<1$ ، $\|X\|_p$ نمی‌تواند نرم باشد. چون نامساوی مثلث برقرار نیست.



$$X = (1, 0, \dots, 0) , \quad Y = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\underbrace{\|X+Y\|_p}_{2^{1/p}} \not\leq \underbrace{\|X\|_p}_{1} + \underbrace{\|Y\|_p}_{1}$$

نکته - هر گوی در فضای نرم‌دار یک مجموعه محدب است.

$$\bar{B}_r(x_0) = \{ x \in V : \|x - x_0\| \leq r \}$$

محدب است یعنی اگر $X, Y \in \bar{B}_r(x_0)$ خواهیم داشت

$$tX + (1-t)Y \in \bar{B}_r(x_0) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\|tX + (1-t)Y - X_0\| = \|t(X - X_0) + (1-t)(Y - X_0)\|$$

$$\leq \|t(X - X_0)\| + \|(1-t)(Y - X_0)\|$$

$$= t\|X - X_0\| + (1-t)\|Y - X_0\|$$

$$\leq tr + (1-t)r = r$$

مثال- فضای ℓ^p یک فضای برداری نرم دار است. $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell^p$

$$\|X\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$$

$$\|X\|_\infty=\sup_{1\le n}|x_n|$$

مثال- روی فضای $C[a,b]$ نرم‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم.

$$\|f\|_\infty=\sup_{a\le t\le b}|f(t)|$$

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

تمرین- نشان دهید وقتی $1\le p$ ، $\|f\|_p$ یک نرم است و وقتی $p<1$ نیست.