آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه سی ۹۹/۱۰/۱۵

گزاره. اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری روی Y_1 و Y_2 باشند. آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند.

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1 \qquad (1)$$

$$Y_1 \subseteq Y_2 \qquad (2)$$

$$\mathrm{Nul}\,P_2 \subseteq \mathrm{Nul}\,P_1 \qquad (3)$$

$$\|P_1x\| \leq \|P_2x\| \qquad (4)$$

$$P_1 \leq P_2 \qquad (5)$$

اثبات. $(2) \Leftarrow (1)$

$$y \in Y_1 \Rightarrow y = P_1y = P_2(P_1y) \in \mathrm{Im}\,P_2 = Y_2$$

$(1) \Leftarrow (2)$

$$x \in H \Rightarrow P_1x \in Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow P_2(P_1x) = P_1x$$

$$\Rightarrow P_2P_1 = P_1 \Rightarrow P_1 = P_1^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2$$

$$x \in \operatorname{Nul} P_2 \Rightarrow P_2 x = 0 \Rightarrow P_1 x = P_1 P_2 x = 0 \qquad (1) \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{Nul} P_1$$

$$x \in \operatorname{Nul} P_2 \Rightarrow P_2 x = 0 \Rightarrow \|P_1 x\| \leq \|P_2 x\| = 0 \qquad (4) \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow P_1 x = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Nul} P_1$$

$$P_1 \leq P_2 \iff (P_1 x, x) \leq (P_2 x, x) \overset{P_i = P_i^2}{\underset{P_i = P_i^*}{\iff}} \|P_1 x\|^2 \leq \|P_2 x\|^2 \qquad (4) \iff (5)$$

$(3) \Rightarrow (1)$ $\quad I - P_i$ نگاشت تصویری بر زیرفضای $\operatorname{Nul} P_i$ و چون $\operatorname{Nul} P_2 \subseteq \operatorname{Nul} P_1$

بنابر $(1) \Rightarrow (2)$ خواهیم داشت:

$$(I - P_1)(I - P_2) = I - P_2 \Rightarrow P_1 (I - P_2) = 0 \Rightarrow P_1 = P_1 P_2$$

$$(I - P_2)(I - P_1) = I - P_2 \Rightarrow (I - P_2) P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2 P_1$$

$$\|P_1x\| = \|P_1P_2x\| \le \|P_1\|\cdot\|P_2x\| \le \|P_2x\| \qquad (1) \Rightarrow (4)$$

قضیه- اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری روی Y_1 و Y_2 باشند. $P = P_2 - P_1$ تصویری است اگر و تنها اگر $Y_1 \subseteq Y_2$

در این صورت P یک عملگر تصویری روی زیرفضای Y است که Y مکمل عمود Y_1 در Y_2 است.

اثبات - با توجه به اینکه P_1 و P_2 خودالحاق هستند، $P = P_2 - P_1$ همراه خودالحاق است. در نتیجه P تصویری است $\iff P = P^2$.

$$P = P^2 \iff P_2 - P_1 = (P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1^2$$

$$\iff P_1P_2 + P_2P_1 = 2P_1 \Rightarrow \begin{cases} 2P_1 = P_1P_2P_1 + P_2P_1 \\ 2P_1 = P_1P_2 + P_1P_2P_1 \end{cases} \Rightarrow P_1P_2 = P_2P_1$$

$$\Rightarrow P_1 = P_1P_2 = P_2P_1 \overset{\text{گزاره قبل}}{\iff} Y_1 \subseteq Y_2$$

$$Y \oplus Y_1 = Y_2 \quad , \quad Y \subseteq Y_1^{\perp} = \mathrm{Nul}\, P_1$$

$$P|_Y = P_2|_Y - P_1|_Y = id - 0 = id$$

$$Y^{\perp} = Y_1 \oplus Y_2^{\perp} \Longrightarrow P|_{Y_1} = P_2|_{Y_1} - P_1|_{Y_1} \underset{Y_1 \subseteq Y_2}{=} 0$$

$$Y_2^{\perp} \subseteq Y_1^{\perp} \Longrightarrow P_1|_{Y_2^{\perp}} = P_2|_{Y_2^{\perp}} = 0$$

$$\Longrightarrow P|_{Y^{\perp}} = 0$$

در نتیجه P نگاشت تصویری بر Y است.

قضیه- اگر $\{P_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عملگرهای تصویر باشد، آنگاه

(1) عملگر تصویری P وجود دارد که $P_n x \longrightarrow Px$ برای هر $x \in H$.

(2) $\operatorname{Im} P = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_n}$

(3) $\operatorname{Nul} P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Nul} P_n$

نکته- بنابر گزاره اول صفحه از رابطه $P_1 \le P_2 \le P_3 \le \dots$ نتیجه می‌شود $\operatorname{Im} P_1 \subseteq \operatorname{Im} P_2 \subseteq \dots$ و

$\operatorname{Nul} P_1 \supseteq \operatorname{Nul} P_2 \supseteq \dots$

اثبات- بنابر قضیه همگرایی دنباله عملگرهای یکنوا و خودالحاق (دو صفحه قبل) و با توجه به اینکه هر عملگر تصویری در رابطه $P_i \le I$ صدق می‌کند برای وجود عملگر P باید داشته باشیم $P_i P_j = P_j P_i$ که این مطلب از گزاره ابتدای صفحه نتیجه می‌شود. (هم ارزی (5) و

(1) برای اینکه P تصویری باشد، تنها باید نشان دهیم $P = P^2$.

$$\|P^2x - P_n x\| = \|P^2x - P_n^2 x\| = \|(P+P_n)(P-P_n)x\|$$

$PP_n = P_nP$

$$\le \|P+P_n\| \cdot \|(P-P_n)x\|$$

$$\le 2\,\|(P-P_n)x\| \longrightarrow 0$$

درنتیجه

$$Px = \lim_{n\to\infty} P_n x = P^2 x$$

$$PP_nx = \lim_{m\to\infty} P_m(P_nx) = \lim_{m\to\infty} P_n(P_mx) = P_n(Px)$$

(۲) برای m ثابت و $m \le n$ با توجه به اینکه $\operatorname{Im} P_m \subseteq \operatorname{Im} P_n$ بنابراین

$$P_n\big|_{\operatorname{Im} P_m} = id \Rightarrow P\big|_{\operatorname{Im} P_m} = id \Rightarrow \operatorname{Im} P_m \subseteq \operatorname{Im} P$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_m \subseteq \operatorname{Im} P$$

چون P تصویری است، $\operatorname{Im} P$ بسته است و در نتیجه $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_m} \subseteq \operatorname{Im} P$.

برعکس اگر $x \in \operatorname{Im} P \Leftarrow x = Px = \lim_{n\to\infty} P_n x$

$P_n x \in \operatorname{Im} P_n$ و در نتیجه $\{P_n x\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_n$

$$\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_n}$$

(3) بدیهی است که $\operatorname{Nul} P \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Nul} P_n$ $\left(Px = \lim_{n\to\infty} P_n x \right)$

$$\operatorname{Nul} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp} \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} P_n\right)^{\perp} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Im} P_n)^{\perp} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Nul} P_n$$