آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه بیست و نه　　　۹۹/۱۰/۸

تعریف: اگر T یک عملگر خودالحاق مثبت باشد، عملگر خودالحاق A را ریشه T می‌نامیم هرگاه $A^2 = T$.
A را ریشه مثبت گوییم هرگاه عملگر A مثبت باشد و با $A = T^{1/2}$ نشان می‌دهیم.

قضیه- هر عملگر خودالحاق و مثبت $T : H \to H$ که H فضای هیلبرت مختلط است، دارای ریشه مثبت A است.
درضمن این ریشه مثبت یکتا است و با هر عملگری که با T جابجا شود، جابجا می‌گردد.

اثبات- گام اول می‌توانیم فرض کنیم $T \leq I$. زیرا اگر $T \neq 0$ یک عملگر خودالحاق و مثبت دلخواه باشد، قرار دهید

$$Q = \frac{T}{\|T\|} \Rightarrow (Qx, x) = \left(\frac{Tx}{\|T\|}, x\right) \leq \frac{\|Tx\|}{\|T\|} . \|x\| \leq \|x\|^2 = (Ix, x)$$

$$\Rightarrow Q \leq I$$

اگر $Q = B^2$ باشد، قرار می‌دهیم $A = \|T\|^{1/2} B$. دراین صورت

$$A^2 = \|T\| . B^2 = T$$

گام دوم : با فرض $I \leq T$ دنباله زیر را تعریف می‌کنیم :

$$A_0 = 0$$

$$A_{n+1} = A_n + \tfrac{1}{2}(T - A_n^2)$$

نشان می‌دهیم

(1) A_n خود الحاق است و $A_n \leq I$

(2) $A_n \leq A_{n+1}$

(3) $A_n A_m = A_m A_n$

به وضوح عملگرهای A_n چندجمله‌ای‌هایی برحسب T هستند و در نتیجه خود الحاق هستند. به همین دلیل (3) برقرار است.

با استقراء نشان می‌دهیم $A_n \leq I$. برای $n=0$ واضح است. فرض کنید $A_n \leq I$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq (I - A_n)^2 \\ 0 \leq I - T \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq \left[(I - A_n)^2 + I - T\right]/2 = I - A_n - \tfrac{1}{2}(T - A_n^2)$$

$$= I - A_{n+1}$$

برای اثبات $A_n \le A_{n+1}$ در حالت $n=0$ داریم $0 = A_0 \le A_1 = \frac{1}{2}T$

فرض کنیم $A_{n-1} \le A_n$.

$$A_{n+1} - A_n = \left[A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)\right] - \left[A_{n-1} + \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2)\right]$$

$$= (A_n - A_{n-1}) + \frac{1}{2}(A_{n-1}^2 - A_n^2)$$

از جابجایی A_n و A_{n-1} استفاده کردیم

$$= \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{\text{مثبت است به دلیل فرض استقراء}} \underbrace{\left[I - \frac{1}{2}(A_{n-1} + A_n)\right]}_{\text{مثبت است به دلیل قسمت (1)}}$$

دو عملگر بالا باهم جابجا می‌شوند به دلیل (3) و در نتیجه ضرب آنها مثبت است.

در نتیجه بنا بر قضیه قبل عملگر خودالحاق A وجود دارد که $A_n x \to Ax$ و $A \le I$. بنابراین

$$A_{n+1}x = A_n x + \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x) \longrightarrow Tx = A^2 x \Rightarrow T = A^2$$

چون A_n صعودی است و $A_0 = 0$ پس $0 \le A$

گام سوم: A_n ها چندجمله‌ای از T است. بنابراین از $TS=ST$ آنگاه $A_nS=SA_n$

و پس از حدگیری نتیجه می‌شود $AS=SA$.

گام چهارم: (یکتایی) فرض کنید $T=A^2=B^2$ و $0\le A,B$ که A عملگری است که در گام‌های قبل ساخته شده است.

$$BT=B^3=TB \overset{\text{گام سوم}}{\Longrightarrow} AB=BA$$

برای یک $x\in H$ دلخواه، قرار دهید $y=(A-B)x$

$$\underbrace{(Ay,y)}_{\ge 0}+\underbrace{(By,y)}_{\ge 0}=((A+B)y,y)\underset{AB=BA}{=}((A^2-B^2)x,y)=((T-T)x,y)=0$$

$$\Rightarrow (Ay,y)=(By,y)=0$$

A عملگر خودالحاق مثبت است و بنابر نتایج گام‌های قبلی ریشه مثبت C برای آن وجود دارد. $C^2=A$

$$0=(Ay,y)=(C^2y,y)=(Cy,Cy)=\|Cy\|^2 \Rightarrow Cy=0 \Rightarrow Ay=C^2y=0$$

به طور مشابه $By = 0$.

$$\|y\|^2 = \|(A-B)x\|^2 = ((A-B)x, (A-B)x)$$

$$= ((A-B)^2 x, x) = ((A-B)y, x) = 0$$

عملگر تصویری :

اگر Y زیرفضای بسته H باشد، تجزیه $H = Y \oplus Y^\perp$ را داریم. همچنین عملگر $P : H \longrightarrow Y$ که هر $x \in H$ را به نزدیکترین عضو Y به آن تصویر می‌کند، به عنوان عملگر تصویر روی زیرفضای می‌شناسیم.

$$x = Px + (I-P)x \quad , \quad Px \in Y, \ (I-P)x \in Y^\perp$$

اگر برد عملگر P را کل فضای H در نظر بگیریم، دارای خواص زیر است:

$$\mathrm{Nul}\, P = Y^\perp , \quad \mathrm{Im}\, P = Y , \quad P|_Y = id$$

- P خودالحاق است. زیرا:

$$(Px_1, x_2)_H = (x_1, Px_2)_H \qquad x_1, x_2 \in H$$

اگر $x_i = y_i + z_i$ که $y_i \in Y$, $z_i \in Y^{\perp}$. آنگاه $Px_i = y_i$

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, Px_2)$$

- P یک عملگر مثبت است.

$$x = y + z$$

$$(Px, x) = (y, y+z) = \|y\|^2 = \|Px\|^2 \geq 0$$

- $\|P\| \leq 1$ و اگر $Y \neq \{0\}$ آنگاه $\|P\| = 1$.

- P خودتوان است، یعنی $P^2 = P$. زیرا برای هر $x \in H$، $Px \in Y$ و $P|_Y = id$ در نتیجه

$$P^2 x = Px$$

قضیه - عملگر $P : H \to H$ تصویری است اگر و تنها اگر P خودالحاق و خودتوان باشد.

اثبات - قرار دهید $Y = \operatorname{Im} P$. ابتدا نشان می‌دهیم $Y \perp \operatorname{Im}(I-P)$.

$$(Px, (I-P)y) \underset{P=P^*}{=} (x, P(I-P)y) \underset{P=P^2}{=} (x,0) = 0$$

حال نشان می‌دهیم $Y = \operatorname{Nul}(I-P)$.

اگر $y = Px \in Y$ آنگاه $y \in \operatorname{Nul}(I-P) \Leftarrow (I-P)y = (I-P)Px = 0$

برعکس اگر $x = Px \in \operatorname{Im}P = Y \Leftarrow (I-P)x = 0$. در نتیجه $\operatorname{Nul}(I-P) \subseteq Y$.

بنابراین Y زیرفضای بسته است. به علاوه $Px = x$ برای هر $x \in Y = \operatorname{Nul}(I-P)$. (یعنی $P|_Y = id$)

درضمن بنابر قسمت اول اثبات برای هر $x \in H$ دلخواه $x = Px + (I-P)x$

که $(Px, (I-P)x) = 0$.

قضیه - اگر P_1 و P_2 دو عملگر تصویری باشند. $P = P_1 P_2$ تصویری است اگر و تنها اگر $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

در این صورت $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P_1 \cap \operatorname{Im} P_2$.

اثبات قضیه - اگر P تصویری باشد، بنابراین $P = P^*$. $\Leftarrow$ $P_1 P_2 = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$.

برعکس فرض کنید $P_1 P_2 = P_2 P_1$. در این صورت P خودالحاق است. زیرا

$$P^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1 = P_1 P_2 = P$$

به علاوه خودتوان نیز هست.

$$P^2 = (P_1 P_2)(P_1 P_2) = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$$

برای x دلخواه $Px = P_1 P_2 x = P_2 P_1 x \ni \operatorname{Im} P_1 \cap \operatorname{Im} P_2$

برعکس اگر $y \in \operatorname{Im} P_1 \cap \operatorname{Im} P_2$ آنگاه $P_1 y = y = P_2 y$ $\Leftarrow$ $Py = P_1 P_2 y = y$ $\Leftarrow$ $y \in \operatorname{Im} P$

نتیجه - اگر Y و Z دو زیرفضای بسته H باشند. آنگاه $Y \perp Z$ اگر و تنها اگر $P_Y P_Z = 0$.

اثبات - $Y \perp Z \Rightarrow P_Z x \in Z \subseteq Y^{\perp} \Rightarrow P_Y P_Z x = 0$.

برعکس اگر $P_Y P_Z = 0$. $y \in Y$ و $z \in Z$ دلخواه بگیرید،

$$(y, z) = (P_Y y, P_Z z) = (y, P_Y P_Z z) = (y, 0) = 0$$

قضیه - P_1 و P_2 دو عملگر تصویری هستند. آنگاه $P = P_1 + P_2$ تصویری است اگر و تنها اگر $\mathrm{Im} P_1 \perp \mathrm{Im} P_2$.

در این حالت $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im} P_1 \oplus \mathrm{Im}\, P_2$.

اثبات - واضح است که P خودالحاق است. نشان می‌دهیم خودتوان است.

$$P^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + (P_1 P_2 + P_2 P_1) + P_2$$

تنها کافی است نشان دهیم $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ که از فرض $\mathrm{Im}\, P_1 \perp \mathrm{Im}\, P_2$ برقرار نتیجه می‌گردد.

برعکس فرض کنیم P عملگر تصویری است . درنتیجه $P^2 = P$.

$$P_1+P_2 = (P_1+P_2)^2 = P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2 \Rightarrow P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$

رابطه بالا را از چپ در P_2 ضرب کنید :

$$(*) \quad P_2P_1P_2 + P_2P_1 = 0$$

و این عبارت را از راست در P_2 ضرب کنید :

$$P_2P_1P_2 + P_2P_1P_2 = 0 \Rightarrow P_2P_1P_2 = 0 \xRightarrow{(*)} P_2P_1 = 0$$

و از رابطه $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$ نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Im}\,P_2 \subseteq Nul(P_1) = (\mathrm{Im}\,P_1)^{\perp} \Leftarrow P_1P_2 = 0$$

$$P_2P_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,P_1 \subseteq Nul\,P_2 = (\mathrm{Im}\,P_2)^{\perp}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,P_1 \perp \mathrm{Im}\,P_2$$