آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و هشت   ۹۹/۱۰/۶

طیف عملگرهای خودالحاق

اگر H فضای هیلبرت باشد و $T : H \longrightarrow H$ عملگر خطی کران‌دار باشد، عملگر الحاقی آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T^* : H \longrightarrow H \qquad (T^*x , y)_H = (x, Ty)_H$$

اگر $T^* = T$، آنگاه T را خودالحاق (یا هرمیتی) گوییم. در نتیجه رابطه زیر برقرار است:

$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad \forall\ x, y \in H$$

قبلاً دیدیم که اگر T خودالحاق باشد، $(x, Tx)_H$ همیشه یک عدد حقیقی است و برعکس آن نیز درست است به شرط آنکه H یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد.

قضیه- اگر $T : H \to H$ خودالحاق باشد، (۱) همه مقادیر ویژه T حقیقی هستند. (۲) بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه متمایز بر هم عمودند.

اثبات- اگر $\lambda \in \sigma_p(T)$ مقدار ویژه باشد و $Tx = \lambda x$ برای $x \neq 0$، آنگاه

$$(x, Tx)_H = (x, \lambda x)_H = \bar{\lambda} \|x\|_H^2 \in \mathbb{R} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) اگر $Tx = \lambda x$ و $Ty = \mu y$ و $\lambda \neq \mu$

$$(Tx, y) = (x, Ty) \implies (\lambda x, y) = (x, \mu y)$$

$$\implies (\lambda - \mu)(x, y)_H = 0 \implies (x, y)_H = 0$$

قضیه- اگر T خودالحاق باشد، آنگاه $\sigma(T)$ تنها شامل اعداد حقیقی است.

لم- اگر T خودالحاق باشد، آنگاه $\lambda \in \rho(T)$ اگر و تنها اگر ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد که $(T_\lambda = T - \lambda I)$

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\| \qquad \forall x \in H$$

اثبات لم - $\Leftarrow$ واضح است. زیرا اگر $\lambda \in \rho(T)$ ، عملگر T_λ وارون‌پذیر است و

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1}(T_\lambda x)\| \leq \|T_\lambda^{-1}\| \cdot \|T_\lambda x\|$$

$\Rightarrow$ واضح است که T_λ یک به یک است. زیرا اگر $T_\lambda x = 0$ از رابطه $\|x\| \leq c\|T_\lambda x\| = 0$

نتیجه می‌شود، $x = 0$.

تنها باید نشان دهیم T_λ پوشا است. $(\operatorname{Im} T_\lambda)^\perp = \operatorname{Nul} T_\lambda^* = \operatorname{Nul} T_\lambda = \{0\}$

در نتیجه $\operatorname{Im} T_\lambda$ در H چگال است. نشان می‌دهیم $\operatorname{Im} T_\lambda$ بسته است. اگر $y \in \overline{\operatorname{Im} T_\lambda}$ و

$$y_n = T_\lambda x_n \longrightarrow y$$

$$\|x_n - x_m\| \leq c\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = c\|y_n - y_m\|$$

در نتیجه دنباله $\{x_n\}$ کوشی است و اگر $x_n \to x$ آنگاه باید $y = T_\lambda x \in \operatorname{Im} T_\lambda$.

اثبات قضیه: قرار دهید $\lambda=\alpha+i\beta$ که $\beta\neq 0$. به کمک لم قبل نشان می‌دهیم $\lambda\in\rho(T)$.

$$(T_\lambda x, x) = (Tx, x) - \lambda\|x\|^2$$

$$\mathrm{Im}(T_\lambda x, x) = -\beta\|x\|^2$$

(دقت کنید که $(Tx,x)\in\mathbb{R}$)

$$|\beta|\cdot\|x\|^2 = |\mathrm{Im}(T_\lambda x, x)| \leq |(T_\lambda x, x)| \leq \|T_\lambda x\|\cdot\|x\|$$

قضیه: $\sigma(T)\subseteq[m,M]$ که

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx, x)$$

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Tx, x)$$

اثبات- به کمک لم قبل نشان می‌دهیم $\lambda = M+\alpha$ که $\alpha > 0$ در طیف قرار ندارد. برای این منظور کافی است نشان دهیم

$$c\|x\| \leq \|T_\lambda x\| \qquad \forall x \in H$$

$$(Tx,x) \leq M\cdot\|x\|^2 \Rightarrow (T_\lambda x, x) = (Tx,x) - \lambda\|x\|^2$$

$$\leq M\|x\|^2 - (M+\alpha)\|x\|^2 = -\alpha\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \alpha\|x\|^2 \leq (-T_\lambda x, x) \leq \|T_\lambda x\|\cdot\|x\|$$

به طور مشابه اگر $\lambda = m-\alpha$ که $\alpha > 0$ می‌توان دید $\lambda \notin \sigma(T)$.

گزاره

$$\|T\| = \max(|m|, |M|) = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|$$

اثبات - عبارت سمت راست را با K نشان دهید. واضح است که $K \leq \|T\|$. زیرا:

$$K = \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)| \leq \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\cdot\|x\| = \|T\|$$

اکنون نشان می‌دهیم $\|T\| \le K$. قرار دهید:

$$y_1 = v + w, \quad y_2 = v - w$$

$$(Ty_1, y_1) - (Ty_2, y_2) = 2\left[(Tv, w) + (Tw, v)\right]$$

$$= 4\,\mathrm{Re}\,(Tv, w)$$

از فرض داریم:

$$(Ty_1, y_1) - (Ty_2, y_2) \le K\left[\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right]$$

$$= K\left[\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2\right]$$

$$= 2K\left[\|v\|^2 + \|w\|^2\right]$$

$$\Longrightarrow \quad K\left[\|v\|^2 + \|w\|^2\right] \ge 2\,\mathrm{Re}\,(Tv, w)$$

اگر $\|x\|=1$ را در نظر بگیریم که $Tx \neq 0$ ، قرار دهید $v = x\,\|Tx\|^{1/2}$, $w = \dfrac{Tx}{\|Tx\|^{1/2}}$ آنگاه

$$2\|Tx\|^2 \le 2K\|Tx\| \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\| \le K$$

قضیه- $m, M \in \sigma(T)$.

اثبات- می‌دانیم $\sigma(T+kI) = \sigma(T)+k$ و $\sigma(-T) = -\sigma(T)$. بنابراین می‌توان فرض کرد که $0 \le m \le M$ و نشان دهیم $M \in \sigma(T)$. بنابر گزاره قبل می‌دانیم که $\|T\| = M$ و دنباله

$$\|x_n\| = 1, \quad (Tx_n, x_n) \to M = \|T\|$$

وجود دارد.

$$\|T_M x_n\|^2 = \|Tx_n - Mx_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2$$

$$\le \|T\|^2 . \|x_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2$$

$$\to 0$$

بنابراین نامساوی $c\|x\| \le \|T_M x\|$ برای هر $x \in H$ نمی‌تواند برای هیچ مقداری از $0 < c$ برقرار باشد.
و در نتیجه T_M وارون پذیر نیست.

عملگرهای مثبت.

تعریف- عملگر خودالحاق $T: H \longrightarrow H$ را مثبت می‌نامیم و با $T \geq 0$ نشان می‌دهیم هرگاه

$$0 \leq (Tx, x) \qquad \forall\, x \in H$$

بنابر قضیه قبل این تعریف معادل است با اینکه $\sigma(T)$ تنها شامل اعداد نامنفی است.

این تعریف، ترتیب زیر را روی مجموعه عملگرهای خودالحاق ارائه می‌کند:

$$T_1 \leq T_2 \iff 0 \leq T_2 - T_1 \iff (T_1 x, x) \leq (T_2 x, x)$$

قضیه- اگر $S, T \geq 0$ و $TS = ST$ آنگاه $0 \leq ST$

اثبات- ایده اثبات این است که داشته باشیم $S = S_1^2 + S_2^2 + \cdots$

$$(TSx, x) = \sum_i (S_i T S_i x, x) = \sum_i (T S_i x, S_i x) \geq 0$$

دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = \frac{S}{\|S\|}, \quad S_{n+1} = S_n - S_n^2$$

ادعا: S_n خودالحاقی است و $TS_n = S_n T$ و $0 \leq S_n \leq I$

با فرض صحت ادعا داریم:

$$S_1 = S_2 + S_1^2 = S_3 + S_1^2 + S_2^2 = \cdots = S_1^2 + \cdots + S_n^2 + S_{n+1}$$

$$S_1^2 + \cdots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leq S_1$$

ادعای بالا $0 \leq S_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} \|S_i x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (S_i x, S_i x) = \sum_{i=1}^{n} (S_i^2 x, x) \leq (S_1 x, x)$$

در نتیجه برای هر x ثابت مجموع $\sum_{i=1}^{\infty} \|S_i x\|^2$ همگرا است و بنابراین $\|S_n x\| \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} S_i^2 x = S_1 x - S_{n+1} x \longrightarrow S_1 x$$

$$(S_1 T x, x) = (T S_1 x, x) = \lim_{n\to\infty} \left(T \sum_{i=1}^{n} S_i^2 x, x\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (S_i T S_i x, x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (T S_i x, S_i x)$$

$$\geq 0$$

اثبات ادعا: جابجایی و خودالحاق بودن S_n ها با استقراء واضح است. نامساوی $0 \le S_n \le I$ را نیز با استقراء اثبات می‌کنیم.

$$(S_1 x, x) = \frac{1}{\|S\|}(Sx, x) \leq \frac{1}{\|S\|}\|Sx\| \cdot \|x\| \leq \|x\|^2 = (Ix, x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_1 \leq I$$

فرض کنید $0 \le S_n \le I$. در نتیجه باید $0 \le I - S_n \le I$.

$$(S_n^2(I-S_n)x, x) = ((I-S_n)S_n x, S_n x) \geq 0$$

$$\Rightarrow S_n^2(I-S_n) \geq 0$$

به طور مشابه می‌توان دید

$$S_n(I-S_n)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_n^2(I-S_n) + S_n(I-S_n)^2 = S_n(I-S_n) = S_{n+1}$$

از طرفی

$$S_{n+1} = S_n - S_n^2 \leq S_n \leq I .$$

قضیه- $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای خودالحاق بگیرید که

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots \leq K$$

به‌علاوه $T_iT_j = T_jT_i$ و $KT_i = T_iK$. آنگاه عملگر خودالحاق T وجود دارد که

$$T \leq K, \qquad T_n x \longrightarrow Tx \qquad \forall x \in H$$

اثبات- نشان می‌دهیم $\{T_n x\}$ یک دنباله کوشی است. آنگاه با تعریف $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ به راحتی می‌توان دید که T یک عملگر خطی کران‌دار و خودالحاق است و در نامساوی $T \leq K$ صدق می‌کند.

$$\|T_n x - T_m x\|^2 = ((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x) = ((T_n - T_m)^2 x, x)$$

$$= (T_n^2 x, x) + (T_m^2 x, x) - 2(T_n T_m x, x)$$

اگر $m < n$، آنگاه $T_m \leq T_n$ و بنابر قضیه قبل و اینکه $0 \leq T_n - T_m$ با $0 \leq T_m$ جابجا می‌شود نتیجه می‌شود

$$0 \leq T_m(T_n - T_m) \implies T_m^2 \leq T_n T_m$$

$$\Rightarrow \quad \|T_n x - T_m x\|^2 \le (T_n^2 x, x) - (T_m^2 x, x)$$

کافی است نشان دهیم دنباله $\{(T_n^2 x, x)\}$ همگرا است. قرار دهید

$$0 \le S_n = K - T_n \quad , \quad 0 \le S_m^2 - S_n S_m = (S_m - S_n) S_m = \underbrace{(T_n - T_m)(K - T_m)}$$

این دو عملگر مثبت هستند باهم جابجا می‌شوند.

$$S_n S_m - S_n^2 = S_n (S_m - S_n) = (K - T_n)(T_n - T_m) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad S_n^2 \le S_n S_m \le S_m^2 \qquad m < n$$

در نتیجه $\{(S_n^2 x, x)\}$ یک دنباله نزولی است و از پایین کران دارد و در نتیجه همگرا است.

$$(S_n^2 x, x) = (K^2 x, x) + (T_n^2 x, x) - 2(K T_n x, x)$$

همچنین $0 \le K T_n$ و دنباله $\{(K T_n x, x)\}$ صعودی است که کران بالای $(K^2 x, x)$ دارد و روابط بالا نشان می‌دهد $\{(T_n^2 x, x)\}$ همگرا است.