آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و هفت   ۹۹/۱۰/۱

جایگزینِ فردهلم

$$A : X \longrightarrow X \quad , \quad A^{\times} : X' \longrightarrow X'$$

(۱) $\quad Ax = y$

(2) $\quad Ax = 0$

(3) $\quad A^{\times} f = g$

(4) $\quad A^{\times} f = 0$

گزاره ۱ – معادله (۱) برای $y \in X$ جواب دارد $\iff$ $\langle f , y \rangle = 0$ برای هر f که در (4) صدق می‌کند.

به خصوص اگر $f = 0$ تنها جواب (4) باشد، آنگاه (۱) برای هر $y \in X$ جواب دارد.

اثبات – (۱) جواب دارد $\iff y \in \operatorname{Im} A$

f جواب (۴) است $\iff f \in \operatorname{Nul} A^{\times}$

اگر $E\subseteq X$ زیرمجموعه باشد، تعریف می‌کنیم

$$E^{\perp}=\{f\in X' : \langle f,x\rangle=0 \quad \forall x\in E\}$$

برای اثبات گزاره تنها کافیست نشان دهیم $(\mathrm{Im}\, A)^{\perp}=\mathrm{Nul}\, A^{\times}$ که به راحتی از تعریف عملگر الحاقی نتیجه می‌شود.

$$\langle A^{\times}f, x\rangle_{X',X}=\langle f, Ax\rangle$$

گزاره ۲ـ معادله (3) برای $g\in X'$ جواب دارد $\Longleftrightarrow$ $\langle g,x\rangle=0$ برای هر x که جواب (2) است.

تعریف- اگر $M\subseteq X'$ تعریف می‌کنیم

$$M^{\perp}=\{x\in X : \langle f,x\rangle=0 \quad \forall f\in M\}$$

گزاره ۲ معادل است با اینکه $(\mathrm{Im}\, A^{\times})^{\perp}=\mathrm{Nul}\, A$

گزاره ۳_ اگر $A=T-\lambda I$ که $T:X\longrightarrow X$ فشرده است و $\lambda\neq 0$. آنگاه معادله (1) برای هر $y\in X$ جواب دارد اگر و تنها اگر $x=0$ تنها جواب (2) باشد. به طور مشابه معادله (3) برای هر $g\in X'$ جواب دارد اگر و تنها اگر $f=0$ تنها جواب (4) باشد.

اثبات_ این گزاره معادل است با اینکه $Nul\, A=\{0\} \iff Im\, A = X$ که این نتیجه لم ۵ جلسه قبل است.

قضیه (جایگزین فردهلم) اگر $A=T-\lambda I$ که T فشرده و $\lambda\neq 0$. بعد فضای جوابهای (2) و (4) متناهی و برابر است. اگر $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ و $\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ پایه‌ای برای جوابهای (2) و (4) باشند، آنگاه معادله (1) جواب دارد اگر و تنها اگر $\langle f_i, y\rangle = 0$ برای $1\le i\le n$. به طور مشابه معادله (3) جواب دارد اگر و تنها اگر $\langle g, x_i\rangle = 0$ برای $1\le i\le n$.

اثبات_ قسمت پایانی قضیه در گزاره‌ی ۱ و ۲ اثبات شدند. متناهی بودن بعد فضاهای جواب (2) و (4) که معادل متناهی بودن بعد $Nul(T-\lambda I)$, $Nul(T^{\times}-\lambda I)$ است در لم ۱ جلسه قبل اثبات شد. برابر بودن بعد این دو فضا را در ادامه اثبات می‌کنیم.

گزاره ۴ ثابت $c>0$ وجود دارد (مستقل از y) که برای هر $y\in X$ که معادله (۱) جواب دارد، حداقل یکی از جواب‌ها در نامساوی

$$\|\tilde{x}\| \leq c\|y\|$$

صدق کند. $(A=T-\lambda I)$

اثبات - اگر $T_\lambda x = y$ آنگاه همه اعضای $x+\mathrm{Nul}\,T_\lambda$ جواب معادله (۱) هستند.

اگر $\mathrm{Nul}\,T_\lambda=\{0\}$ آنگاه T_λ پوشا نیز هست (گزاره ۳) و درنتیجه وارون پیوسته دارد و (۱) جواب یکتا دارد.

$$x=T_\lambda^{-1}y \Rightarrow \|x\| \leq \|T_\lambda^{-1}\|\cdot\|y\|$$

می‌توان قرار داد $c=\|T_\lambda^{-1}\|$

درحالت کلی اگر $y\in \mathrm{Im}\,T_\lambda$ و x یک جواب (۱). آنگاه از بین همه جواب‌ها در $x+\mathrm{Nul}\,T_\lambda$ بردار $\tilde{x}$ وجود دارد که

$$\|\tilde{x}\| = \min_{z-x\in \mathrm{Nul}\,T_\lambda} \|z\|$$

بنابر لم ۱ جلسه قبل $\dim \mathrm{Nul}\,T_\lambda<\infty$ و کافیست می‌نیمم عبارت بالا را در یک مجموعه کران‌دار در $\mathrm{Nul}\,T_\lambda$ جستجو کنیم. درنتیجه می‌نیمم به دست می‌آید.

فرض کنیم گزاره غلط باشد و $y_n \in \mathrm{Im}\, T_\lambda$ که $T_\lambda \tilde{x}_n = y_n$ و $\tilde{x}_n$ مینیمم نرم را از بین جواب‌ها داشته باشد، به علاوه

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \to \infty$$

$$T_\lambda\left(\frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|\tilde{x}_n\|} \to 0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر T فشرده است و $\left\{ T\left(\frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|}\right) \right\}$ زیردنباله همگرا دارد. برای سادگی همان دنباله را بگیرید که

$$T\left(\frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|}\right) \to z \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \dfrac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} \to x^* = \dfrac{z}{\lambda} \\[2ex] T_\lambda x^* = 0 \implies x^* \in \mathrm{Nul}\, T_\lambda \end{cases}$$

$$\left\| \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} - x^* \right\| = \frac{1}{\|\tilde{x}_n\|} \| \underbrace{\tilde{x}_n - \|\tilde{x}_n\| x^*}_{\in\, \tilde{x}_n + \mathrm{Nul}\, T_\lambda} \| \geq \frac{1}{\|\tilde{x}_n\|} \cdot \|\tilde{x}_n\| = 1$$

که تناقض است با همگرایی بالا.

لم - اگر $\{f_1, \dots, f_m\}$ در X' مستقل خطی باشند، اعضای $\{x_1, \dots, x_m\}$ در X وجود دارند که

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}$$

اثبات- به طور استقرایی نشان می‌دهیم z_m وجود دارد به طوری که

$$f_m(z_m) = 1 \quad , \quad f_j(z_m) = 0 \qquad j = 1, \dots, m-1$$

برای $m=1$ با توجه به استقلال خطی $\{f_1\}$ باید $f_1 \neq 0$. در نتیجه $f_1(z) \neq 0$ برای لااقل یک $z \in X$.

$$z_1 = \frac{z}{f_1(z)} \Rightarrow f_1(z_1) = 1$$

برای انتخاب z_m باید داشته باشیم

$$(2) \begin{cases} z \in Nul f_1 \cap \dots \cap Nul f_{m-1} = M \\ f_m(z) \neq 0 \end{cases}$$

با قرار دادن $z_m = \dfrac{z}{f_m(z)}$ حکم مورد نظر اثبات می‌گردد. اگر (2) برقرار نباشد باید $f_m|_M = 0$.

برای هر $x \in X$ دلخواه قرار دهید

$$\tilde{x} = x - \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) z_j \in M$$

که $\{z_1, \dots, z_{m-1}\}$ نقاط متناظر $\{f_1, \dots, f_{m-1}\}$ باشند. به راحتی می‌توان دید که

$$f_i(\tilde{x}) = 0 \qquad 1 \leq i \leq m-1$$

بنابر فرض خلف که $f_m|_M = 0$ باید $f_m(\tilde{x}) = 0$ در نتیجه

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m-1} f_j(x) f_m(z_j) = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f_j(x)$$

که $\alpha_j = f_m(z_j)$. رابطه بالا برای هر $x \in X$ برقرار است. در نتیجه باید

$$f_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f_j$$

که تناقض دارد با استقلال خطی $\{f_i\}$.

لم - اگر $\{x_1, \dots, x_m\}$ در X مستقل خطی باشند، اعضای $\{g_1, \dots, g_m\}$ در X' وجود دارند که

$$g_i(x_j) = \delta_{ij}$$

اثبات - $x_i \notin \underbrace{\langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m \rangle}_{\text{زیرفضای بعد متناهی و در نتیجه بسته}}$ $\Leftarrow$ یک تابعک خطی پیوسته g_i وجود دارد که $g_i(x_i) \neq 0$ و g_i روی زیرفضای داده شده برابر صفر است.

اثبات قضیه جایگزین فردهلم:

$$\dim \mathrm{Nul}(T_\lambda) = \dim \mathrm{Nul}(T_\lambda^x)$$

$n = \dim \mathrm{Nul}\, T_\lambda$ و $m = \dim \mathrm{Nul}\, T_\lambda^x$.

اگر $n = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, T_\lambda = X \Rightarrow \mathrm{Nul}\, T_\lambda^x = (\mathrm{Im}\, T_\lambda)^\perp = \{0\} \Rightarrow m = 0$

و برعکس اگر $m = 0$ آنگاه $n = 0$.

فرض کنید $0 < n < m$

$$\operatorname{Nul} T_\lambda = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$\operatorname{Nul} T_\lambda^\times = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

مشابه دو لم قبل $\{g_1, \dots, g_n\}$ در X' و $\{z_1, \dots, z_m\}$ در X را پیدا کنید به طوری که

$$f_i(z_j) = \delta_{ij} \qquad g_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$Sx := Tx + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) z_i$$

تصویر عملگر $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} g_i(x) z_i$ در زیرفضای $\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ قرار دارد. در نتیجه یک عملگر رتبه متناهی و فشرده است. چون T نیز فشرده بود، عملگر S فشرده خواهد شد.

ادعا: $\operatorname{Nul}(S - \lambda I) = \{0\}$

$$S_\lambda x = 0 \Rightarrow T_\lambda x + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) z_i = 0$$

$$\Rightarrow f_j(T_\lambda x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_j(z_i) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_j(T_\lambda x)}_{(T_\lambda^\times f_j)(x)} + g_j(x) = 0$$

$$f_j \in \mathrm{Nul}\, T_\lambda^\times \Rightarrow g_j(x) = 0 \quad \forall j \Rightarrow Sx = Tx$$

$$\Rightarrow T_\lambda x = 0 \Rightarrow x \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Rightarrow 0 = g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_j(x_i) = \alpha_j$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$\mathrm{Nul}\, S_\lambda = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}\, S_\lambda = X$ و معادله $S_\lambda x = y$ برای هر $y \in X$ جواب دارد.

در حالت خاص قرار دهید $y = z_{n+1}$

$$S_\lambda x = z_{n+1} \Rightarrow T_\lambda x + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) z_i = z_{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 = f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}(T_\lambda x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \underbrace{\cancel{f_{n+1}(z_i)}}_{0}$$

$$= (T_\lambda^\times f_{n+1})(x) = 0 \qquad \divideontimes$$

این تناقض از آنجا به دست آمد که فرض کردیم $n < m$ و $f_{n+1} \in \mathrm{Nul}\, T_\lambda^\times$ وجود دارد.

حالت $n > m$ نیز به طور مشابه با در نظر گرفتن عملگر تعریف شده زیر به تناقض می‌رسد.

$$\tilde{S} f = T^\times f + \sum_{j=1}^{m} f(z_j)\, g_j$$

مثال- معادله انتگرالی زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t) \qquad a \le t \le b$$

که $K(t,s)$ تابع پیوسته روی $[a,b] \times [a,b]$ است. قبلاً دیدیم که

$$(Tx)(t) := \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$$

یک عملگر فشرده روی فضای $C[a,b]$ است. برای تابع $y \in C[a,b]$ داده شده قرار است معادله

$$(I - \lambda T)x = y$$

را حل کنیم. حالت $\lambda = 0$ بدیهی است. اگر $\lambda \neq 0$ به معادله

$$\left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)x = -\frac{1}{\lambda} y$$

می‌رسیم. اگر $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه T نباشد، معادله بالا برای هر y جواب یکتا دارد.