آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه بیست و شش ۹۹/۹/۲۹

طیف عملگرهای فشرده

X فضای باناخ و $T: X \longrightarrow X$ فشرده

(1) $0 \in \sigma(T)$ اگر $\dim X = \infty$

(2) $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$

(3) $\sigma_p(T)$ حداکثر شمارا است و تنها نقطه تجمع ممکن آن صفر است.

(4) بعد هر فضای ویژه متناظر با هر مقدار ویژه ناصفر متناهی است.

اثبات (1) اگر $0 \notin \sigma(T)$ آنگاه T وارون‌پذیر است $\Leftarrow$ T^{-1} پیوسته است و T فشرده است $\Leftarrow$ $I = T \circ T^{-1}$ فشرده

عملگرهای همانی تنها در فضای بعد متناهی فشرده است.

اثبات (۴) $\lambda \neq 0$ تعداد ویژه است.

$$T : Nul(T-\lambda I) \longrightarrow Nul(T-\lambda I)$$

$$x \in Nul(T-\lambda I) \Rightarrow Tx = \lambda x$$

بنابراین باید $T|_{Nul(T-\lambda I)} = I$ یک عملگر فشرده باشد. پس بعد $Nul(T-\lambda I)$ متناهی است.

اثبات (3) ثابت می‌کنیم برای هر $r>0$ ، تعداد مقادیر ویژه $|\lambda| \geq r$ متناهی است.

فرض کنید چنین نباشد و $\|x_n\| = 1$ و $|\lambda_n| \geq r$ ، $Tx_n = \lambda_n x_n$ را در نظر بگیرید.

$\{\lambda_n\}$ را متمایز می‌گیریم. بنابراین $\{x_n\}$ مستقل خطی‌اند.

$$M_n := \langle x_1, \dots, x_n \rangle \quad , \quad T - \lambda_n I : M_n \longrightarrow M_{n-1}$$

بنابر لم ریس، $y_n \in M_n$ وجود دارد که $\frac{1}{2} \leq dist(y_n, M_{n-1})$ و $\|y_n\| = 1$

بنا بر فشردگی T باید $\{Ty_n\}$ زیردنباله همگرا داشته باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که $\{Ty_n\}$ هیچ زیردنباله کوشی ندارد.

$$m<n, \quad \|Ty_n - Ty_m\| = \|\underbrace{(T-\lambda_n I)y_n}_{\in M_{n-1}} + \lambda_n y_n - \underbrace{Ty_m}_{\in M_m \subseteq M_{n-1}}\|$$

$$\geq |\lambda_n| \cdot \operatorname{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{r}{2} > 0$$

ایده اثبات (۲): باید نشان دهیم اگر $\lambda \neq 0$ و $T_\lambda = T-\lambda I$ یک به یک باشد، آنگاه T_λ پوشا نیز هست. در واقع وآزار این گزاره نشان می‌دهیم که زنجیره‌ی زیر از یکجا به بعد هر دو همزمان ثابت می‌شوند.

$$\{0\} = Nul(T_\lambda^0) \subseteq Nul(T_\lambda) \subseteq Nul(T_\lambda^2) \subseteq \cdots$$

$$X = Im(T_\lambda^0) \supseteq Im(T_\lambda) \supseteq Im(T_\lambda^2) \supseteq \cdots$$

در این صورت اگر T_λ یک به یک باشد، $Nul(T_\lambda) = \{0\}$ و زنجیره‌ی اول در گام اول ثابت می‌ماند. بنابراین زنجیره‌ی دوم نیز از گام اول به بعد ثابت می‌ماند.

یعنی $Im(T_\lambda) = X$ و T_λ پوشا است.

$$N_n := \mathrm{Nul}(T_\lambda^n), \qquad R_n := \mathrm{Im}(T_\lambda^n)$$

لم ۱. $\dim N_n < \infty$ وقتی $\lambda \neq 0$.

اثبات- $\lambda \notin \sigma_p$ آنگاه T_λ یک‌به‌یک است و $N_n = \{0\}$ برای هر n . در این حالت چیزی برای اثبات نداریم.

اگر $0 \neq \lambda \in \sigma_p$. بنابر خاصیت (4) طیف عملگرهای فشرده $\dim(N_1) < \infty$.

$$T_\lambda^2 = (T - \lambda I)^2 = \underbrace{T^2 - 2\lambda T}_{\text{فشرده}} + \lambda^2 I$$

به همین ترتیب داریم $T_\lambda^n = S + (-\lambda)^n I$ که S یک عملگر فشرده است و بنابر خاصیت (4) باید

$$\dim N_n = \dim \mathrm{Nul}(S + (-\lambda)^n I) < \infty$$

لم ۲ - عدد صحیح r وجود دارد که برای $n \geq r$ همه فضاهای پوچ N_n برابر هستند.

اثبات - اگر $N_m = N_{m+1}$ آنگاه، برای هر $n \geq m$ داریم $N_n = N_{n+1}$. زیرا در غیر اینصورت $x \in N_{n+1} \setminus N_n$

$$T_\lambda^{n+1} x = 0 \quad , \quad T_\lambda^{n} x \neq 0$$

$$\Rightarrow T_\lambda^{m+1} (T_\lambda^{n-m} x) = 0 \quad , \quad T_\lambda^{m} (T_\lambda^{n-m} x) \neq 0$$

$$\Rightarrow T_\lambda^{n-m} x \in N_{m+1} \setminus N_m \quad \times$$

اکنون باز گردیم به اثبات لم، با برهان خلف می‌توان فرض کرد که $N_n \subsetneq N_{n+1}$ برای هر n.

$y_{n+1} \in N_{n+1} \setminus N_n$ انتخاب کنید که $\|y_{n+1}\| = 1$ و $\frac{1}{2} \leq dist(y_{n+1}, N_n)$. نشان می‌دهیم $\{T y_n\}$ هیچ زیردنباله کوشی ندارد.

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|T_\lambda y_n - T_\lambda y_m + \lambda(y_n - y_m)\| \qquad m<n$$

$= \|\lambda y_n -$ عضوی از $N_{n-1}\| \ge |\lambda| \cdot \mathrm{dist}(y_n , N_{n-1}) \ge \frac{|\lambda|}{2} > 0$

دقت کنید که $y_n \in N_n$ و داریم: $T_\lambda : N_n \longrightarrow N_{n-1}$

لم 3 – $R_n = \mathrm{Im}\, T_\lambda^n$ بسته است هرگاه $\lambda \neq 0$.

اثبات_ تنها کافی است برای $n=1$ اثبات کنیم. وقتی $n>1$ مشابه لم 1 با توجه به رابطه $T_\lambda^n =$ فشرده $+(-\lambda)^n I$

اثبات کامل می‌شود. اگر R_1 بسته نباشد، $y \in \overline{R_1} \setminus R_1$ و دنباله $T_\lambda x_n = y_n \in R_1$ را در نظر بگیرید که

(1) $\qquad (T - \lambda I)x_n = y_n \longrightarrow y$

بنابر فشردگی اگر $\{x_n\}$ کران‌دار باشد، $\{Tx_n\}$ زیردنباله همگرا دارد. اگر این زیردنباله را برای سادگی $\{Tx_n\}$ بگیریم و

$$Tx_n \longrightarrow v \overset{(1)}{\Longrightarrow} x_n \longrightarrow w = \frac{v-y}{\lambda} \overset{\text{پیوستگی}}{\Longrightarrow} T_\lambda w = y$$

$$\Rightarrow y \in R_1 \quad \times$$

بنابراین باید $\{x_n\}$ بی‌کران باشد. $z_n \in Nul(T_\lambda)$ بگیرید به طوری که

$$\|x_n - z_n\| \leq 2\, dist(x_n, Nul\, T_\lambda) = a_n$$

اگر $\{a_n\}$ کران‌دار باشد با جایگزینی $x_n - z_n$ به جای x_n در رابطه (۱) مشابه قبل به تناقض می‌رسیم.

اگر $\{a_n\}$ بی‌کران باشد، قرار دهید

$$\omega_n := \frac{x_n - z_n}{a_n} \quad , \|\omega_n\| \leq 1$$

$$T\omega_n - \lambda\omega_n = T_\lambda \omega_n = \frac{1}{a_n} T_\lambda x_n = \frac{1}{a_n} y_n \longrightarrow 0 \qquad (\text{چون } y_n \to y)$$

بنابر فشردگی T، زیردنباله‌ای از $\{T\omega_n\}$ همگراست. بنابر رابطه‌ی بالا باید زیردنباله‌ای از $\{\omega_n\}$ نیز همگرا باشد.

$$\omega_n \longrightarrow \omega \quad \Rightarrow \quad T_\lambda \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \in Nul(T_\lambda)$$

$$\frac{a_n}{2} = dist(x_n, Nul\, T_\lambda) = dist(z_n + a_n\omega_n, Nul\, T_\lambda)$$

$$= dist(a_n(\omega_n - \omega), Nul\, T_\lambda) \leq |a_n| \cdot \|\omega_n - \omega\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \|\omega_n - \omega\| \quad \times$$

لم ۴- عدد صحیح q وجود دارد که برای $n \ge q$ ، $R_n = R_{n+1}$

اثبات- مشابه لم ۲ اگر $R_m = R_{m+1}$ ، آنگاه برای $n \ge m$ داریم $R_n = R_{n+1}$. بنابراین در صورتی که گزاره بالا درست نباشد، باید $R_n \supsetneq R_{n+1}$. بنابر لم ریس $y_n \in R_n \setminus R_{n+1}$ وجود دارد که

$$\|y_n\| = 1, \quad \mathrm{dist}(y_n, R_{n+1}) \ge 1/2$$

دقت کنید بنابر لم ۳ زیرفضاهای R_n بسته هستند و می‌توان از لم ریس استفاده کرد. مشابه اثبات‌های قبل می‌توان دید که $\{Ty_n\}$ زیردنباله کوشی ندارد.

لم ۵- دو عدد صحیح r و q که در لم‌های ۲ و ۴ تعریف شدند، برابرند.

$$\{0\} \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_r = N_{r+1} = \cdots$$

$$X \supsetneq R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq \cdots \supsetneq R_q = R_{q+1} = \cdots$$

اثبات $r \leq q$. ادعا: $T_\lambda : R_q \to R_{q+1} = R_q$ یک به یک است.

اگر ادعا درست باشد و $N_q \neq N_{q+1}$ آنگاه $x \in N_{q+1} \setminus N_q$ را انتخاب کنید.

$$T_\lambda^{q+1} x = 0 \ , \ 0 \neq T_\lambda^{q} x \in R_q$$

$$\Rightarrow 0 \neq T_\lambda^{q} x \in Nul\left(T_\lambda \big|_{R_q}\right) \quad \times$$

اثبات ادعا: $0 \neq x_1 \in R_q$ که $T_\lambda x_1 = 0$. از طرفی T_λ پوشا است پس $0 \neq x_2 \in R_q$ وجود دارد که

$$T_\lambda x_2 = x_1$$

به طور مشابه $x_n \in R_q$ وجود دارد که $T_\lambda x_n = x_{n-1}$ و در نتیجه

$$T_\lambda^{n} x_n = 0 \ , \ T_\lambda^{n-1} x_n = x_1 \neq 0 \ \Rightarrow \ x_n \in N_n \setminus N_{n-1}$$

که تناقض دارد با نتیجه لم ۲.

<u>اثبات $r \geq q$</u> تنها کافی است نشان دهیم $N_{q-1} \neq N_q$.

داریم $R_q \neq R_{q-1}$ و $y \in R_{q-1} \setminus R_q$ در نظر بگیرید.

$$T_\lambda^{q-1} x = y \implies T_\lambda y \in R_q = R_{q+1} \implies T_\lambda y = T_\lambda^{q+1} z$$

$$\implies T_\lambda^{q} x = T_\lambda^{q+1} z \implies T_\lambda^{q} [x - T_\lambda z] = 0$$

$$\implies x - T_\lambda z \in N_q$$

$$T_\lambda^{q-1} [x - T_\lambda z] = y - T_\lambda^{q} z \neq 0$$

چون $y \notin R_q$

در نتیجه $x - T_\lambda z \in N_q \setminus N_{q-1}$.

قضیه: اگر $r=q$ مقادیر تعریف شده در لم‌های قبل باشند داریم:

$$X = N_r \oplus R_r$$

اثبات ـ $\quad x \in X \Rightarrow T_\lambda^r x \in R_r = R_{2r} \Rightarrow \exists y : T_\lambda^r x = T_\lambda^{2r} y$

$$\Rightarrow T_\lambda^r (x - T_\lambda^r y) = 0 \Rightarrow x - T_\lambda^r y \in N_r$$

$$\Rightarrow x = (x - T_\lambda^r y) + T_\lambda^r y \in N_r + R_r$$

اگر $x \in N_r \cap R_r$ آنگاه $x = T_\lambda^r y \ , \ 0 = T_\lambda^r x$

$$\Rightarrow T_\lambda^{2r} y = 0 \Rightarrow y \in N_{2r} = N_r \Rightarrow T_\lambda^r y = 0 \Rightarrow x = 0$$