آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و پنج ۹۹/۹/۲۴

قضیه- X و Y فضای نرم دار و $T: X \to Y$ فشرده. اگر $\{x_n\}$ در X به طور ضعیف به x همگرا باشد، آنگاه $\{Tx_n\}$ به طور قوی در Y به $y = Tx$ همگرا است.

نکته- این قضیه نشان می‌دهد عملگرهای فشرده نسبت به توپولوژی ضعیف دامنه پیوسته هستند.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $Tx_n \xrightarrow{w} y$. برای این منظور $f \in Y'$ را در نظر بگیرید، آنگاه $f \circ T \in X'$

در نتیجه باید

$$f \circ T(x_n) \longrightarrow f \circ T(x)$$

$$\Rightarrow f(Tx_n) \longrightarrow f(y)$$

فرض کنید $Tx_n \not\to y$ پس زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که $\|Tx_{n_k} - y\| \geq \epsilon > 0$ از طرفی $x_n \xrightarrow{w} x$

بنابراین $\{x_n\}$ کراندار است و بنابر فشردگی $\{Tx_{n_k}\}$ زیردنباله همگرا (قوی) در Y دارد. این زیردنباله را برای سادگی با $\{Tx_{n_k}\}$ نشان می‌دهیم. اگر $Tx_{n_k} \to z$ و در ابتدای اثبات نشان دادیم که $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} y$. بنابراین باید $y = z$ که تناقض دارد با فرض بالا.

نکته- برعکس این قضیه وقتی X بازتابی است درست است. زیرا در فضای بازتابی گوی واحد در توپولوژی ضعیف فشرده است.

گزاره- اگر T فشرده باشد، $\operatorname{Im}T$ و $\overline{\operatorname{Im}T}$ جدایی‌پذیر هستند.

اثبات- می‌دانیم هر مجموعه‌ای که بستار آن فشرده باشد جدایی‌پذیر است (چرا؟). $\operatorname{Im}T=\bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n)$

چون $\overline{T(B_n)}$ فشرده است، بنابراین جدایی‌پذیر است. در نتیجه $\operatorname{Im}T$ جدایی‌پذیر است.

همچنین اگر یک مجموعه‌ای جدایی‌پذیر باشد، بستار آن نیز جدایی‌پذیر است (چرا؟) در نتیجه باید $\overline{\operatorname{Im}T}$ جدایی‌پذیر باشد.

قضیه- اگر X فضای نرم‌دار و H فضای هیلبرت باشد و $T\in K(X,H)$ آنگاه دنباله‌ای از عملگرهای رتبه متناهی $\{T_n\}$ وجود دارند که $\|T_n-T\|\to 0$.

اثبات- به جای H قرار می‌دهیم $\overline{\operatorname{Im}T}$ که یک زیرفضای بسته و جدایی‌پذیر آن است. در نتیجه یک پایه هیلبرتی $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $\overline{\operatorname{Im}T}$ وجود دارد.

عملگر تصویر $P_n : \overline{\operatorname{Im} T} \longrightarrow \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$T_n := P_n \circ T : X \longrightarrow H$$

که یک عملگر رتبه متناهی است. اکنون نشان می‌دهیم $T_n \to T$.

با فرض خلف، فرض کنید $T_n \not\to T$ و برای زیردنباله‌ای (که برای سادگی با T_n نشان می‌دهیم)

$$\| T_n - T \| \geq \epsilon > 0$$

بنابراین $\| x_n \|_X = 1$ وجود دارد که $\| T_n(x_n) - T(x_n) \|_H \geq \frac{\epsilon}{2}$

چون T فشرده است زیردنباله‌ای از $\{Tx_n\}$ همگراست (که دوباره برای سادگی با Tx_n نشان می‌دهیم)

$$Tx_n \longrightarrow y \quad \text{in } H$$

$$\| T_n x_n - T x_n \| \leq \| P_n (T x_n - y) \| + \| P_n y - y \| + \| y - T x_n \|$$

جمله سوم به دلیل $Tx_n \to y$ به صفر همگرا است.

جمله اول از آنجا که نرم عملگر P_n یک است و از همگرایی $Tx_n \to y$ نتیجه می‌شود که به صفر همگرا است.

جمله دوم، $P_n y - y$ به دلیل آنکه $\{e_n\}$ پایه هیلبرتی است، به صفر همگرا است.

نتیجه: اگر H_1 و H_2 هیلبرت باشند، $T \in B(H_1, H_2)$ فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

$$\left[\ \text{یادآوری: } T^* : H_2 \to H_1 \ ، \ (T^* y, x)_{H_1} = (y, Tx)_{H_2}\ \right]$$

اثبات ـ اگر T فشرده باشد، بنابر قضیه قبل دنباله عملگرهای رتبه متناهی T_n وجود دارد که $T_n \to T$.

$$\| T_n - T \| = \| (T_n - T)^* \| \longrightarrow 0$$

پس $T_n^* \to T^*$. تنها کافی است نشان دهیم T_n^* رتبه متناهی است. می‌دانیم:

$$\operatorname{Ker} T_n^* = (\operatorname{Im} T_n)^{\perp} \quad , \quad H_2 = \operatorname{Ker} T_n^* \oplus (\operatorname{Ker} T_n^*)^{\perp}$$

$$\Rightarrow (\operatorname{Ker} T_n^*)^{\perp} = (\operatorname{Im} T_n)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T_n} = \operatorname{Im} T_n$$

$$\operatorname{rank} T_n = \dim(\operatorname{Im} T_n) < \infty$$

$$\Rightarrow H_2 = \operatorname{Ker} T_n^* \oplus \operatorname{Im} T_n$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} T_n^* = T_n^*(H_2) = T_n^*(\operatorname{Im} T_n)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank} T_n^* = \dim(\operatorname{Im} T_n^*) < \infty$$

برعکس اگر T^* فشرده باشد، بنابر قسمت اول اثبات $T = T^{**}$ نیز فشرده است.

قضیه- اگر X و Y فضای نرم‌دار باشند، $T: X \to Y$ فشرده است اگر و تنها اگر $T^{\times}: Y' \to X'$ فشرده باشد.

[یادآوری: $\langle T^{\times} f , x \rangle_{X',X} = \langle f , Tx \rangle_{Y',Y}$]

اثبات - فرض کنید T فشرده است و $\{f_n\}$ یک دنباله کران‌دار در Y' باشد. قرار دهید $K = \overline{T(B_X)} \subseteq Y$ که فشرده است. B_X گوی واحد در X.
توابع f_n را به عنوان دنباله‌ای از توابع پیوسته در $C(K)$ در نظر بگیرید و از قضیه آرزلا-اسکولی استفاده کنید.

$$\sup_{y \in K} |f_n(y)| \leq \|f_n\| \cdot \sup_{y \in K} |y| \leq M < \infty$$

چون K فشرده و $\{f_n\}$ یک دنباله کران‌دار در Y' است.

همچنین از کران‌داری $\{f_n\}$ نتیجه می‌شود که این دنباله هم‌پیوسته است. بنابراین زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که به‌طور یکنواخت در $C(K)$ به f همگراست.

(1) $$\sup_{y \in K} |f_{n_k}(y) - f(y)| \longrightarrow 0$$

نشان می‌دهیم $\{T^{\times} f_{n_k}\}$ در X' به $f \circ T$ همگراست.

از (1) داریم:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |f_{n_k}(Tx) - f(Tx)| \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

این عبارت نشان می‌دهد که می‌توان f را به یک تابعک خطی روی $\operatorname{Im} T$ توسیع داد.

درضمن چون $\{f_{n_k}\}$ کران دار است، f نیز روی $\operatorname{Im} T$ کران دار است و بنابر هان-باناخ می‌توان f را به Y توسیع داد.

$$\|T^{\times} f_{n_k} - T^{\times} f\|_{X'} = \sup_{|x| \leq 1} |T^{\times} f_{n_k}(x) - T^{\times} f(x)|$$

$$= \sup_{|x| \leq 1} |f_{n_k}(Tx) - f(Tx)| \xrightarrow{(2)} 0$$

برعکس $T^{\times}$ فشرده باشد، درنتیجه $T^{\times\times} : X'' \longrightarrow Y''$ فشرده است. درنتیجه $T^{\times\times}(B_{X''})$ بستار فشرده دارد. از طرفی می‌دانیم نشاندن $X \hookrightarrow X''$ پیوسته است و

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "T^{\times\times}"] & Y'' \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

بنابراین

$$i_Y(T(B_X)) = \underbrace{T^{\times\times}(i_X(B_X))} \subseteq T^{\times\times}(B_{X''})$$

بستار فشرده دارد

درنتیجه $T(B_X)$ بستار فشرده در Y دارد.

طیف عملگرهای فشرده

اگر $T : X \to X$ فشرده باشد که X فضای باناخ است، آنگاه

(1) $0 \in \sigma(T)$ اگر $\dim X = \infty$.

(2) $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$.

(3) $\sigma_p(T)$ حداکثر شمارا است و تنها نقطه تجمع ممکن آن صفر است .

(4) بعد هر فضای ویژه (برای هر مقدار ویژه ناصفر) متناهی است .

مثال- $T: \ell^p \to \ell^p$.

$T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ فشرده است.

$$Tx = \lambda x \Rightarrow \frac{x_n}{n} = \lambda x_n \Rightarrow \lambda = 1/n ,\ x = e_n$$

$$\Rightarrow \sigma_p(T) = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$$

$\lambda \notin \sigma(T) \Rightarrow$ $T-\lambda I$ پوشا و یک به یک است

$$(T-\lambda I)x = y \Rightarrow \frac{x_n}{n} - \lambda x_n = y_n$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{y_n}{\frac{1}{n} - \lambda}$$

اگر $\lambda = 0$ ، آنگاه $x_n = n y_n$ که لزوماً برای هر $y \in \ell^p$ ، $x \in \ell^p$ نیست بنابراین $0 \in \sigma_{ess}(T)$

ولی برای $\lambda \neq 0, \frac{1}{n}$ می‌دانیم $x \in \ell^p$ است و $T-\lambda I$ پوشا است.

درنتیجه $\sigma(T)=\{0,1,\frac{1}{2},\dots\}$. که احکام مربوط به خواص طیف عملگر فشرده برقرار است.

مثال $R(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots)$ فشرده است.

$$Rx=\lambda x \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_n}{n}=\lambda x_{n+1}, & n=1,2,\dots \\ 0=\lambda x_1 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

درنتیجه $R-\lambda I$ برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ یک به یک است. یعنی $\sigma_p(R)=\phi$.

واضح است که R پوشا نیست. بنابراین $0\in\sigma(R)$. با کمک قضیه شعاع طیفی نشان میدهیم $r_\sigma(R)=0$.

بنابراین باید $\sigma(R)=\{0\}$.

$$R^n(x)=(\underbrace{0,\dots,0}_{n},\frac{x_1}{n!},\frac{x_2}{(n+1)!},\dots,\frac{x_k\cdot(k-1)!}{(n+k-1)!},\dots)$$

$$\Rightarrow \|R^n\|=\frac{1}{n!} \Rightarrow \sqrt[n]{\|R^n\|}=\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\longrightarrow 0$$