# آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و چهار ۹۹/۹/۲۲

لم ـ برای هر بردار ثابت $x \in X$ و تابعک خطی پیوسته $f \in X'$، تابع $h(\lambda) = f(R_\lambda x)$ در $\rho(T)$ تحلیلی است.

(یادآوری: $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$)

اثبات ـ باید نشان دهیم برای هر نقطه $\lambda_0 \in \rho(T)$، تابع $h(\lambda)$ در یک همسایگی این نقطه برابر یک سری توانی است.

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n \qquad |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$$

برای نشان دادن این مطلب از تساوی زیر که در جلسه قبل اثبات کردیم، استفاده می‌کنیم

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1} \qquad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$$

$$\Rightarrow \quad h(\lambda) = f(R_\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f(R_{\lambda_0}^{n+1} x)$$

این همان سری توانی است که باید نشان می‌دادیم.

قضیه- اگر $X \neq \{0\}$ فضای باناخ و $T \in B(X,X)$، آنگاه $\sigma(T) \neq \phi$.

اثبات- اگر $\sigma(T) = \phi$، آنگاه $\rho(T) = \mathbb{C}$. بنابراین برای هر $x \in X$ و $f \in X'$، تابع $h(\lambda) = f(R_\lambda x)$ روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است. می‌خواهیم از قضیه لیوویل (اگر تابع تحلیلی $h$ روی $\mathbb{C}$ کران‌دار باشد، تابع ثابت است) استفاده کنیم.

$$|h(\lambda)| \leq \|f\|_{X'} \cdot \|R_\lambda\| \cdot \|x\|$$

به علاوه طبق پیش دیدیم که

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > \|T\|$$

درنتیجه

$$\|R_\lambda\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \times \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

بنابراین اگر $|\lambda| \geq 2\|T\|$، آنگاه $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\|T\|}$. لذا برای این مقادیر $\lambda$ تابع $h(\lambda)$ کران‌دار است.

چون $h$ روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است پس در داخل دایره $|\lambda| \leq 2\|T\|$ نیز کران دار است و در نتیجه روی $\mathbb{C}$ کران دار است.

بنابر قضیه لیوویل $h$ باید یک تابع ثابت باشد.

$$\Rightarrow \quad f(R_\lambda x) = f(R_\mu x) \qquad \forall x \in X,\ f \in X',\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad R_\lambda x = R_\mu x \qquad \forall x \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad R_\lambda = R_\mu \Rightarrow T - \lambda I = T - \mu I$$

تصحیح (شعاع طیفی) $r_\sigma(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$

اثبات - در جلسه پیش به کمک رابطه $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ برای هر چندجمله‌ای $p$ دیدیم که

$$r_\sigma(T) \le \sqrt[n]{\|T^n\|} \Rightarrow r_\sigma(T) \le \liminf \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

اکنون نشان می‌دهیم

$$\limsup \sqrt[n]{\|T^n\|} \le r_\sigma(T)$$

تابع تحلیلی $h(\lambda) = f(R_\lambda x)$ روی $\rho(T)$ را در نظر بگیرید. از تساوی


$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > \|T\|$$

در تعریف $h$ استفاده کنید:

$$h(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n x)}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > \|T\|$$

که یک سری لوران به مرکز $\lambda = 0$ برای تابع تحلیلی $h$ است.

از قضایای آنالیز مختلط می‌دانیم این سری در $|\lambda| > r_\sigma(T)$ (جایی که $h$ تحلیلی است) همگرا است.

$$h(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n x)}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > r_\sigma(T)$$

همچنین می‌دانیم:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r_\sigma + \epsilon} h(\lambda)\, \lambda^n \, d\lambda$$

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \times \max_{|\lambda| = r_\sigma + \varepsilon} |h(\lambda)| \cdot (r_\sigma + \varepsilon)^n \times \underbrace{2\pi(r_\sigma + \varepsilon)}_{\text{محیط دایره}}$$

$$|f(T^n x)| \leq (r_\sigma+\varepsilon)^{n+1} \times \max_{|\lambda|=r_\sigma+\varepsilon} |f(R_\lambda x)|$$

$$\leq (r_\sigma+\varepsilon)^{n+1} \; \|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X \cdot \max_{|\lambda|=r_\sigma+\varepsilon} \|R_\lambda\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T^n\| = \sup_{\substack{0\neq f\in X' \\ 0\neq x\in X}} \frac{|f(T^n x)|}{\|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X} \leq (r_\sigma+\varepsilon)^{n+1} \cdot \max_{|\lambda|=r_\sigma+\varepsilon} \|R_\lambda\|$$

$$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq r_\sigma+\varepsilon$$

چون $\varepsilon$ که یک مقدار دلخواه است ، اثبات کامل می‌شود.

# عملگرهای فشرده

عملگر خطی $T: X \to Y$ را فشرده گوییم هرگاه برای هر مجموعه کراندار $M \subseteq X$، $\overline{T(M)}$ در $Y$ فشرده باشد.

فضای همه عملگرهای فشرده را با $K(X,Y)$ نشان می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ است یعنی هر عملگر فشرده، کراندار است. زیرا $\overline{T(B_1)}$ در $Y$ فشرده و در نتیجه کراندار است.

$$\exists m>0 , \forall x \in B_1 : \|Tx\|_Y \le m \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X : \|Tx\|_Y \le m\|x\|_X$$

مثال: عملگر همانی $I: X \to X$، اگر $\dim X = \infty$ فشرده نیست. (چون $\overline{B_1}$ در $X$ فشرده نیست)

مثال- اگر $\dim Y < \infty$، آنگاه هر عملگر پیوسته $T \in B(X,Y)$ فشرده است. ($\overline{T(M)}$ در $Y$ بسته و کراندار است)

مثال- اگر $\dim X < \infty$، آنگاه هر عملگر پیوسته $T \in B(X,Y)$ فشرده است ($\overline{T(M)} \subseteq T(\overline{M})$ و $T(\overline{M})$ تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده است)

تعریف- $\operatorname{rank} T = \dim \operatorname{Im} T$ ، عملگر $T$ را رتبه متناهی گوییم هرگاه $\operatorname{rank} T < \infty$ .

مثال- هر عملگر رتبه متناهی فشرده است .

نکته- در تعریف عملگر فشرده کافی است $M = B_1$ باشد. یعنی $T$ فشرده است اگر و تنها اگر $\overline{T(B_1)}$ در $Y$ فشرده باشد.

اگر $\overline{T(B_1)}$ فشرده باشد ، $\overline{T(B_n)} = n\,\overline{T(B_1)}$ نیز فشرده است. اگر $M$ یک مجموعه کراندار دلخواه باشد و $M \subseteq B_n$ ، آنگاه $\overline{T(M)} \subseteq \overline{T(B_n)}$ که زیرمجموعه بسته ای از یک مجموعه فشرده است و درنتیجه $\overline{T(M)}$ فشرده است .

مثال - $T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$$

که $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است. نشان می‌دهیم عملگر $T$ فشرده است.

$$\|Tx\|_\infty \leq \max_{a \leq t,s \leq b} |K(t,s)| \cdot \|x\|_\infty \cdot (b-a) \Rightarrow$$ $T$ پیوسته است.

بنابراین اگر $B_1 \subseteq C[a,b]$ گوی واحد باشد، $T(B_1)$ کران‌دار است. برای اینکه $\overline{T(B_1)}$ فشرده باشد

بنابر قضیه آرزلا- اسکولی باید اعضای آن به طور یکنواخت کران‌دار و هم پیوسته باشند.

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\, ds \cdot \|x\|_\infty$$

نامساوی بالا هم پیوستگی اعضای $T(B_1)$ را نشان می‌دهد.

گزاره - $T$ فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله کران دار $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $X$ داشته باشیم $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $Y$ زیردنباله همگرا دارد.

اثبات - $\Leftarrow$ واضح است. چون $M=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه کران دار است و $\overline{T(M)}$ باید فشرده باشد.

$\Rightarrow$ فرض کنید $M$ یک مجموعه کران دار است که $\overline{T(M)}$ فشرده نیست. بنابراین دنباله $\{y_n\}$ در $\overline{T(M)}$ وجود دارد که هیچ زیردنباله آن همگرا نیست. اگر $y_n=Tx_n$ که $x_n\in M$ پس $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار است ولی $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله همگرا ندارد.

گزاره اگر $T\in B(X,Y)$ و $S\in B(Y,Z)$، آنگاه $ST$ فشرده است اگر لااقل یکی از عملگرهای $T$ یا $S$ فشرده باشد.

اثبات - اگر $T$ فشرده باشد، $\overline{T(B_1)}$ در $Y$ فشرده است و چون $S$ پیوسته است بنابراین $S(\overline{T(B_1)})$ نیز در $Z$ فشرده است. درنتیجه

$$\overline{ST(B_1)} = S(\overline{T(B_1)})$$

فشرده است و $ST$ عملگر فشرده است.

اگر $T$ پیوسته و $S$ فشرده باشد، $T(B_1)$ یک مجموعه کران دار در $Y$ است و $\overline{S(T(B_1))}$ فشرده است.

نتیجه - عملگرهای وارون پذیر (وارون پیوسته) فشرده نیستند.

قضیه- اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای فشرده باشد که $\|T_n - T\| \to 0$ ، آنگاه $T$ فشرده است.

( $K(X,Y)$ زیرفضای بسته $B(X,Y)$ است که فضای $Y$ باناخ است )

اثبات- اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کران‌دار در $X$ باشد، نشان می‌دهیم $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $Y$ زیردنباله همگرا دارد.

از طرفی $T_m$ فشرده است، پس $\{T_m x_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله همگرا دارد. اگر $\{T_1 x_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد،

که $\{x_{n,1}\}$ زیردنباله $\{x_n\}$ است، آنگاه $\{T_2 x_{n,1}\}$ باید یک زیردنباله همگرا داشته باشد.

آن را با $\{T_2 x_{n,2}\}$ نشان می‌دهیم که $\{x_{n,2}\}$ زیردنباله $\{x_{n,1}\}$ است. به همین ترتیب زیردنباله

$\{x_{n,m}\}$ از $\{x_{n,m-1}\}$ وجود دارد که $\{T_m x_{n,m}\}$ همگرا است. به راحتی می‌توان دید که $\{Tx_{n,n}\}$

همگرا است.

$$\|Tx_{n,n} - Tx_{k,k}\| \le \|Tx_{n,n} - T_m x_{n,n}\| + \|T_m x_{n,n} - T_m x_{k,k}\| + \|T_m x_{k,k} - Tx_{k,k}\|$$

$$\leq \|T-T_m\| \cdot \|x_{n,n}\| + \|T_m x_{n,n} - T_m x_{k,k}\| + \|T-T_m\| \cdot \|x_{k,k}\|$$

چون دنباله $\{x_n\}$ کراندار است پس $\|x_{n,n}\|$ و $\|x_{k,k}\| \leq M$.

$m$ را به اندازه کافی بزرگ بگیرید که $\|T-T_m\| < \frac{\epsilon}{3M}$

برای این مقدار $m$ می‌توان $k, n$ را به اندازه کافی بزرگ گرفت که $\|T_m x_{n,n} - T_m x_{k,k}\| < \frac{\epsilon}{3}$

در نتیجه $\{T x_{n,n}\}$ کوشی است.

مثال- $T: \ell^p \to \ell^p$

$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ فشرده است.

عملگر $T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \dots)$ رتبه متناهی است و

در نتیجه فشرده است. به سادگی می‌توان دید که

$$(T - T_n)(x) = (0, \dots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad \|T - T_n\| = \frac{1}{n+1} \to 0$$

نکته - اگر در قضیه قبل به جای همگرایی در نرم عملگری، همگرایی $T_n x \longrightarrow Tx$ به ازای هر $x$ را در نظر بگیریم،

نتیجه درست نیست. به عنوان مثال عملگر رتبه متناهی

$$T_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

فشرده است و برای هر $x \in l^p$ ،

$$T_n x \longrightarrow x = Ix$$

ولی عملگر همانی فشرده نیست.