آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و سه ۹۹/۹/۱۷

طیف عملگر (Spectrum)

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه A است هرگاه بردار $u \neq 0$ وجود داشته باشد که $Au = \lambda u$.

(یا به طور معادل $Nul\, A-\lambda I \neq \{0\}$) در این حالت اگر λ مقدار ویژه نباشد، $A-\lambda I$ یک ماتریس وارون‌پذیر است.

اگر X یک فضای برداری نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشد و $T : X \to X$ یک عملگر خطی پیوسته، طیف این عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ وارون پیوسته ندارد}\}$$

مکمل این مجموعه که به آن مجموعه حلال (resolvent) گوییم

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T-\lambda I)^{-1} \text{ پیوسته است}\}$$

اگر X باناخ باشد، بنابر قضیه نگاشت باز $\lambda \in \rho(T)$ اگر و تنها اگر $T-\lambda I$ یک‌به‌یک و پوشا باشد.

در این حالت می‌توان طیف عملگر را به دو دسته تقسیم کرد.

- مقادیر ویژه (طیف نقطه‌ای): مقادیر λ که $T-\lambda I$ یک به یک نیست. در این حالت $x \in X$ وجود دارد که $Tx = \lambda x$. به x بردار ویژه گفته می‌شود. مجموعه مقادیر ویژه را با $\sigma_p(T)$ نشان می‌دهیم.

- اساسی (طیف پیوسته): مقادیر λ که $T-\lambda I$ یک به یک است ولی پوشا نیست. مجموعه این مقادیر را با $\sigma_{ess}(T)$ نشان می‌دهیم.

مثال- عملگر همانی $I: X \longrightarrow X$ به وضوح اگر $\lambda \neq 1$ باشد، $I-\lambda I$ وارون‌پذیر است. $\sigma(I)=\sigma_p(I)=\{1\}$

مثال: $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ که $Tf = f\varphi$ برای تابع پیوسته $\varphi \in C[0,1]$

اگر $\lambda \in \sigma_p(T)$ آنگاه

$$f \in Nul(T-\lambda I) \iff f\varphi = \lambda f \iff f(x)[\varphi(x)-\lambda] = 0$$

اگر $\lambda \notin \varphi[0,1]$ آنگاه $f \equiv 0$ و $T-\lambda I$ یک‌به‌یک است.

اگر $\varphi(x) = \lambda$ در یک بازه‌ای، آنگاه λ مقدار ویژه است.

اگر $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$ آنگاه $T-\lambda I$ پوشا است. یعنی برای هر $g \in C[0,1]$ باید معادله

$$(T-\lambda I)f = g$$

جواب داشته باشه. یا به‌طور معادل

$$f(x)\,(\varphi(x)-\lambda) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{g}{\varphi-\lambda} \in C[0,1] \qquad \forall g \in C[0,1]$$

باید $\lambda \in \varphi[0,1]$. درنتیجه

$$\sigma(T) = \varphi[0,1]$$

مثال- $R:\ell^2 \to \ell^2$ شیفت به راست

$$R(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

$$\lambda \in \sigma_p(R) \iff Nul(R-\lambda I) \neq \{0\} \iff \exists X \in \ell^2 : \ Rx = \lambda x$$

$$\iff (0, x_1, x_2, \cdots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \cdots)$$

$$\iff X = 0$$

$$\implies \sigma_p(R) = \phi$$

$\lambda \notin \sigma_{ess}(R) \iff$ $R-\lambda I$ پوشا است $\iff \forall y \in \ell^2 \ \exists x \in \ell^2 : \ (R-\lambda I)X = Y$

$$(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$$

$$\begin{cases} -\lambda x_1 = y_1 \\ x_n - \lambda x_{n+1} = y_{n+1} \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

اگر $\lambda = 0$ باید داشت $y_1 = 0$. درنتیجه $R - \lambda I$ پوشا نیست و بنابراین نتیجه گرفت که $0 \in \sigma_{ess}(R)$.

برای $\lambda \neq 0$ قرار دهید $y = e_1$ آنگاه باید

$$x = \left(\frac{-1}{\lambda}, \frac{-1}{\lambda^2}, \frac{-1}{\lambda^3}, \cdots \right)$$

و برای اینکه $x \in \ell^2$ باید $|\lambda| > 1$. پس اگر $|\lambda| \leq 1$ آنگاه $e_1 \notin Im(R - \lambda I)$ و درنتیجه

$$\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \} \subseteq \sigma_{ess}(R) = \sigma(R)$$

به کمک لم زیر میتوان دید که نقطه دیگری در طیف عملگر R قرار ندارد.

لم- اگر X باناخ باشد و $T \in B(X,X)$ که $\|T\| < 1$ ، آنگاه $I - T$ وارون پیوسته دارد و

$$(I - T)^{-1} \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{این سری در } B(X,X)}}{=} I + T + T^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

اثبات - $S_k = \sum_{n=0}^{k} T^n$ یک دنباله کوشی در $B(X,X)$ است.

$$\|S_k - S_l\| = \|T^{l+1} + \cdots + T^k\| \leq \|T^{l+1}\| + \cdots + \|T^k\|$$

$$\leq \|T\|^{l+1} + \cdots + \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{l+1}}{1-\|T\|} \longrightarrow 0$$

در نتیجه عملگر $S \in B(X,X)$ وجود دارد که $S_k \to S$.

$$(I-T)S = \lim_{k\to\infty} (I-T)S_k = \lim_{k\to\infty} I - T^{k+1} = I$$

دقت کنید چون $\|T\|<1$ پس $\|T^{k+1}\| \to 0$ و در نتیجه $T^{k+1} \to 0$ در $B(X,X)$.

به طور مشابه داریم $S(I-T) = I$.

نتیجه- اگر X باناخ باشد و $T \in B(X,X)$ ، $\|T\| < |\lambda|$ ، آنگاه $T - \lambda I$ وارون پیوسته دارد و در نتیجه

$$\sigma(T) \subseteq \{ \lambda : |\lambda| \leq \|T\| \}$$

مثال- در مثال شیفت به راست با توجه به اینکه $\|R\| = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$\sigma(R) = \{ \lambda : |\lambda| \leq 1 \}$$

مثال- شیفت به چپ $L : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ ، $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$

از نتیجه بالا می‌دانیم که $\sigma(L) \subseteq \{ \lambda : |\lambda| \leq 1 \}$.

$$\lambda \in \sigma_p(L) \iff \exists x \in \ell^2 : Lx = \lambda x \iff (x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

$$\iff x_{n+1} = \lambda x_n \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\iff x = x_1 (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

برای اینکه $x \in \ell^2$ باید $|\lambda|<1$. درنتیجه

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda|<1\} = \sigma_p(L)$$

به کمک قضیه زیر می‌توان دید که $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(L)$.

(تمرین: به صورت تمرینات آیا می‌توان دید که $|\lambda|=1$ در $\sigma_{ess}(L)$ وارد دارد ؟)

قضیه - مجموعه حلال $\rho(T)$ از یک عملگر پیوسته T ، باز است یا به طور معادل طیف $\sigma(T)$ بسته است .

اثبات - فرض کنید $\lambda_0 \in \rho(T)$ و عملگر $T-\lambda_0 I$ وارون پذیر باشد و قرار دهید $R_{\lambda_0}(T) = (T-\lambda_0 I)^{-1}$.

$$T - \lambda I = (T-\lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda) I = (T-\lambda_0 I)\left[I + (\lambda_0-\lambda) R_{\lambda_0}(T) \right]$$

درنتیجه $\lambda \in \rho(T)$ اگر و تنها اگر $I + (\lambda_0-\lambda) R_{\lambda_0}(T)$ وارون پذیر باشد، و بنابر لم قبل این اتفاق رخ است هرگاه

$$|\lambda_0 - \lambda| \leq \| R_{\lambda_0}(T) \|^{-1} .$$

نتیجه: برای $|\lambda-\lambda_0| \le \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ آنگاه

$$R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1} = \left(I + (\lambda_0-\lambda) R_{\lambda_0}\right)^{-1} R_{\lambda_0}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n (R_{\lambda_0})^{n+1}$$

نتیجه- $\sigma(T)$ فشرده است و در نتیجه $\rho(T)$ ناتهی است.

سؤال ۳: چرا $\sigma(T) \neq \phi$ ؟

تعریف- $r_\sigma(T) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ شعاع طیفی عملگر T می‌نامیم. بنابر لمی که اثبات کردیم

$$r_\sigma(T) \le \|T\|$$

در جلسه آینده اثبات خواهیم کرد که:

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

قضیه - اگر X باناخ باشد و $T \in B(X,X)$ آنگاه برای هر چندجمله‌ای p داریم:

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$$

تعریف - اگر $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای باشد، منظور از

$$p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I \in B(X,X)$$

و اگر $A \subseteq \mathbb{C}$ یک مجموعه باشد،

$$p(A) = \{ p(z) : z \in A \} \subseteq \mathbb{C}$$

نکته - اگر در قضیه بالا قرار دهیم $p(x) = x^n$، آنگاه $\sigma(T^n) = (\sigma(T))^n$

$$\Rightarrow \quad (r_\sigma(T))^n = r_\sigma(T^n) \leq \| T^n \|$$

$$\Rightarrow \quad r_\sigma(T) \leq \sqrt[n]{\| T^n \|}$$

اثبات. اگر $\deg p = 0$ آنگاه $p(x) = a_0$ یک تابع ثابت است.

$$p(T) = a_0 I \,, \qquad p(\sigma(T)) = \{a_0\}$$

و چون $\sigma(a_0 I) = \{a_0\}$ در نتیجه قضیه در این حالت برقرار است.

اگر $0 < n = \deg p$، ابتدا نشان می‌دهیم $\sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$

اگر $\mu \in \sigma(p(T))$ آنگاه $\mu \in p(\sigma(T))$ اگر و تنها اگر $p(x) = \mu$ برای لااقل یک $x \in \sigma(T)$. تجزیه زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x) - \mu = a_n (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

اگر $\lambda_i \notin \sigma(T)$ آنگاه $T - \lambda_i I$ وارون‌پذیر است و در نتیجه بنابر تجزیه بالا $p(T) - \mu I$ باید وارون‌پذیر باشد که با شرط $\mu \in \sigma(p(T))$ تناقض دارد.

برعکس نشان می‌دهیم $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$.

اگر $\lambda \in \sigma(T)$ و فرض کنید $\mu = p(\lambda) \not\in \sigma(p(T))$ در نتیجه $p(T) - \mu I$

وارون‌پذیر است. از طرفی λ ریشه چندجمله‌ای $p(x) - \mu = 0$ است پس

$$p(x) - \mu = (x - \lambda)\, q(x) \qquad \deg q = n-1$$

$$\Rightarrow \quad p(T) - \mu I = (T - \lambda I)\, q(T) = q(T)(T - \lambda I)$$

اما چون $p(T) - \mu I$ وارون‌پذیر است باید $T - \lambda I$ وارون‌پذیر باشد که تناقض دارد با $\lambda \in \sigma(T)$.