آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه بیست‌ودو ۹۹/۹/۱۵

کاربردهایی از همگرایی ضعیف * :

<u>جمع‌پذیری دنباله‌ها</u> : به‌دنبال مفهومی از حد برای دنباله‌های واگرا هستیم که این معنی جدید حد، برای دنباله‌های همگرا همان معنی سابق را بدهد.

مثال - برای دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ قرار دهید $y_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. اگر $\{y_n\}$ به y همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را جمع‌پذیر چزارو به y گوییم. اگر دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا باشد، آنگاه $\{y_n\}$ نیز به x همگرا است.

$$\forall \varepsilon\ \exists N,\ n \geq N \ \text{sth.}\quad |x_n - x| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{x_1+\cdots+x_N}{n} + \frac{n-N}{n}(x-\varepsilon)}_{\downarrow\, x} < y_n = \frac{(x_1+\cdots+x_N)+(x_{N+1}+\cdots+x_n)}{n} < \underbrace{\frac{x_1+\cdots+x_N}{n} + \frac{n-N}{n}(x+\varepsilon)}_{\downarrow\, x}$$

در ضمن دنباله واگرای $(0,1,0,1,0,1,\dots)$ متناظرش دنباله $y = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \dots)$ به $\frac{1}{2}$ همگرا است.

الگوی جمع‌پذیری : ماتریس $A=(a_{nm})$ که یک ماتریس نامتناهی است را الگوی جمع‌پذیری گوییم

که دنباله $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را به دنباله $Y=AX$ تبدیل می‌کند :

$$y_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m$$

اگر y_n به y همگرا باشد، آنگاه دنباله $X=(x_n)$ به y، A- جمع‌پذیر است.

روش A- جمع‌پذیری را منظم گوییم هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ که به x همگرا است، نتیجه شود $y_n\to x$.

(دقت کنید در این روش ضرورتی ندارد که مجموع $\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}x_m$ برای هر n همگرا باشد، هر چند قضیه زیر نشان می‌دهد که

اگر A- جمع‌پذیری منظم باشد، برای دنباله‌های کران‌دار $\{x_n\}$ این مجموعه‌ها همگرا هستند)

قضیه: A منظم است اگر و تنها اگر

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0 \qquad \text{for } m=1,2,3,\ldots$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$$

$$(3) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \gamma \qquad \text{for } n=1,2,3,\ldots$$

که γ مستقل از n است.

اثبات- (شرط لازم) به جای دنباله X قرار دهید $X = e_m = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ که یک دنباله همگرا به صفر است. پس $Y = Ae_m$ نیز باید به صفر همگرا باشد. اما $y_n = a_{nm}$ که (1) را اثبات می‌کند.

حال اگر قرار دهیم $X = (1,1,1,\ldots)$ که به یک همگرا است، باید $Y = AX$ نیز به یک همگرا باشد، اما

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$$

برای اثبات (3) فضای برداری همه دنباله‌های همگرا را با C نشان دهید همراه با نرم سوپریمم.

$$f_{nk}(X) = \sum_{m=1}^{k} a_{nm} x_m \Rightarrow |f_{nk}(X)| \leq \left(\sum_{m=1}^{k} |a_{nm}|\right) \cdot \|X\|_\infty$$

$$\Rightarrow f_{nk} \in C'$$

برای هر $X \in C$ داریم:

$$f_{nk}(X) \longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m =: f_n(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_{nk} \xrightarrow{*} f_n \text{ in } C' \quad \& \quad f_n \in C'$$

از طرف دیگر برای هر $X \in C$، دنباله $\{f_n(X)\}$ همگرا است (تعریف A-منظم) در نتیجه بنابر قضیه کران داری یکنواخت

دنباله $\{\|f_n\|\}$ کراندار است.

$$\Rightarrow \quad \|f_n\| \leq \gamma$$

اکنون در (3) دنباله زیر را قرار دهید:

$$\xi_m^{(n,k)} = \begin{cases} \dfrac{a_{nm}}{|a_{nm}|} & a_{nm} \neq 0, \quad m \leq k \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f_n\left(\xi_m^{(n,k)}\right) = \sum_{m=1}^{k} |a_{nm}| \leq \|f_n\| \cdot \|\xi_m^{(n,k)}\|_\infty \leq \gamma$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \gamma$$

شرط کانی :

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m$$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} x_m$$

می‌دانیم $f_n , f \in C'$.

$$|f(x)| \leq \|x\|_\infty$$

$$(1) \quad |f_n(x)| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|\right) \cdot \|x\|_\infty \underset{\text{شرط (3)}}{\leq} \gamma \|x\|_\infty$$

برای اثبات تنها باید نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ برای هر $x \in C$. یا به عبارتی $f_n \xrightarrow{*} f$

برای نشان دادن این مطلب کافی است : (a) $\{\|f_n\|\}$ کراندار باشد .

(b) $f_n(x) \to f(x)$ برای هر x در یک زیرمجموعه چگال C .

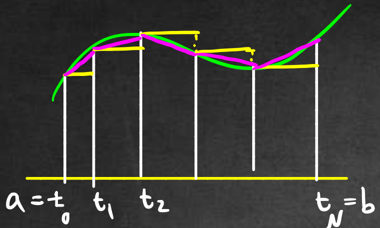
از (۱) واضح است که $\|f_n\| \le \alpha$. بنابراین (a) برقرار است .

$M \subseteq c$ را زیرمجموعه همه دنباله‌های از یکجا به بعد ثابت بگیرید که به‌راحتی می‌توان دید در c چگال هستند.

$$X \in M \Rightarrow X = (x_1, \dots, x_N, x, x, \dots)$$

$$f_n(X) = \sum_{m=1}^{N} a_{nm} x_m + x \sum_{m=N+1}^{\infty} a_{nm}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=1}^{N} a_{nm}(x_m - x)}_{\downarrow \text{شرط (۱)} \atop 0} + x \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}}_{\downarrow \text{شرط (۲)} \atop 1} \longrightarrow x = f(X)$$



تقریب عددی انتگرال

$$\int_a^b f(t)\,dt \sim \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,\Delta t_k$$ ← تقریب چپ

$$\sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_k)+f(t_{k+1})}{2}\,.\,\Delta t_k$$ تقریب ذوزنقه

یک روش تقریب انتگرال انتخاب نقاط $a \le t_0^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \le b$ و ضرایب $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$

و محاسبه

$$T_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)})$$

این روش را دقیق گوییم هرگاه $T_n(f) \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ برای هر $f \in C[a,b]$.

یک مثال از روش دقیق $t_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a)$ و $\alpha_i^{(n)} = \frac{b-a}{n}$ که همان تقریب چپ است.

قرار دهید $X = C[a,b]$ با نرم سوپریمم. $T, T_n \in X'$.

$$|T_n(f)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|\right) \|f\|_\infty \Rightarrow T_n \in X'$$

$$\|T_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$$

اگر f را قطعه‌قطعه خطی و پیوسته بسازیم به گونه‌ای که $f(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn}(\alpha_k^{(n)})$ ، آنگاه $\|f\|_\infty = 1$ و

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \Rightarrow \|T_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$$

یک روش اثبات دیگر تحقیق است اگر و تنها اگر $T_n \xrightarrow{*} T$.

ازطرفی $T \xrightarrow{*} T_n$ هرگاه

الف) $\{\|T_n\|\}$ کران دار باشد.

ب) برای توابع f در یک زیر مجموعه چگال X رابطه $T_n(f) \longrightarrow T(f)$ برقرار باشد.

اگر T_n روی چندجمله‌ایهای درجه حداکثر n دقیق باشد، یعنی

$$T_n(f) = T(f) \qquad f \in \langle 1, t, t^2, \dots, t^n \rangle$$

$$(2) \qquad T_n(t^m) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \left(t_k^{(n)}\right)^m = \int_a^b t^m \, dt = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \qquad 0 \leq m \leq n$$

اگر نقاط $\{t_0^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}\}$ مشخص باشند، رابطه بالا یک دستگاه خطی با $(n+1)$ مجهول $\alpha_k^{(n)}$ را ارائه می‌دهد که

جواب یکتا دارد. ماتریس ضرایب این دستگاه به صورت زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0^{(n)} & t_1^{(n)} & \cdots & t_n^{(n)} \\ \vdots & & & \\ (t_0^{(n)})^n & (t_1^{(n)})^n & \cdots & (t_n^{(n)})^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (t_i^{(n)} - t_j^{(n)}) \neq 0$$

قضیه: اگر روش انتگرال‌گیری T_n در (2) صدق کند، n نقطه دقیق است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \le C$$

برای هر n.

نتیجه - اگر روش انتگرال‌گیری T_n در (2) صدق کند و ضرایب $\alpha_k^{(n)}$ نامنفی باشند، آن‌گاه T_n دقیق است.

اثبات -

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} = T(1) = \int_a^b dt = b-a$$