آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه دوم ۹۹/۶/۲۹

توپولوژی در یکِ فضای متریک

(X, d) یک فضای متریک

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$ گوی باز به شعاع r و مرکز x_0

مجموعه باز : $U \subseteq X$ باز است هرگاه برای هر $x_0 \in U$ شعاع r وجود داشته باشد به طوری که

$$B_r(x_0) \subseteq U$$

مجموعه بسته : هر مجموعه ای که مکمل آن باز باشد، بسته است.

همسایگی : هر مجموعه باز که x_0 داخل آن باشد، همسایگی نقطه x_0 نامیده می شود.

نقطه حدی : x_0 نقطه حدی مجموعه A است هرگاه هر همسایگی نقطه x_0 ، عضوی به غیر از x_0 در A داشته باشد.

به عبارت دیگر، برای هر $r>0$ ، $B_r(x_0)-\{x_0\} \cap A \neq \emptyset$.

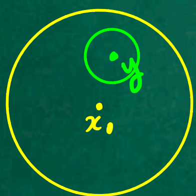
(دقت کنید لزوماً x_0 در مجموعه A قرار ندارد)

$$A=[0,1)\cup\{2\}$$

مجموعه نقاط حدی مجموعه A را با $\lim(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف- بستار مجموعه A در فضای متریک X ، برابر $A\cup\lim(A)$ تعریف می‌شود و با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم.

نکته- هر گوی باز یک مجموعه باز است.



$$\forall y\in B_r(x_0)\quad \exists r' \quad B_{r'}(y)\subseteq B_r(x_0)$$

$r'<r-d(x_0,y)$ کافی است

مثال- $\ell^\infty = \{ (x_n)_{n\ge 1} : \exists M \text{ sth. } |x_n| \le M \}$

$c = \{ (x_n)_{n\ge 1} : \exists \alpha \text{ sth. } \lim x_n = \alpha \}$

در جلسه پیش دیدیم که ℓ^∞ یک فضای متریک با متر سوپریمم است.

$$d\big((x_n)_{n\ge 1}, (y_n)_{n\ge 1}\big) = \sup_{n\ge 1} |x_n - y_n|$$

$c \subseteq \ell^\infty$ بسته است.

برای اینکه نشان دهیم $\ell^\infty \setminus c$ باز است. فرض کنید $X_0 = (x_n^0)_{n\ge 1} \in \ell^\infty \setminus c$ یک دنباله واگرا باشد. درنتیجه $\underline{\lim} = \liminf x_n^0 < \limsup x_n^0 = \overline{\lim}$. اگر $r < \frac{1}{2}(\overline{\lim} - \underline{\lim})$ آنگاه $B_r(X_0) \subseteq \ell^\infty \setminus c$. برای هر $Y = (y_n)_{n\ge 1} \in B_r(X_0)$ ابـ $|y_n - x_n| \le r < \frac{1}{2}(\overline{\lim} - \underline{\lim})$

$$\limsup y_n \geq \limsup (x_n + y_n - x_n)$$

$$\geq (\limsup x_n) - r > \frac{\overline{\lim} + \underline{\lim}}{2}$$

$$\liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n - x_n)$$

$$\leq \liminf x_n + r < \frac{\overline{\lim} + \underline{\lim}}{2}$$

در نتیجه دنباله $\{y_n\}$ واگرا است.

تعریف- U زیرمجموعه چگال A است هرگاه $A \subseteq \overline{U}$

تعریف- فضای متریک (X, d) را جدایی‌پذیر گوییم هرگاه یک زیرمجموعه چگال و شمارا داشته باشد.

مثال- $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ همگی جدایی‌پذیر هستند. زیرمجموعه چگال شمارا بردارهای با درایه گویا هستند.

مثال- X با متر گسسته درصورتی جدایی‌پذیر است که X شمارا باشد. زیرا هر زیرمجموعه X هم باز است و هم بسته.

مثال- $\ell^p = \{ (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$ وقتی $1 \leq p$ جدایی‌پذیر است.

$$M = \{ (x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{Q} , \exists N , n \geq N , x_n = 0 \}$$

به وضوح $M \subseteq \ell^p$. نشان می‌دهیم M در ℓ^p چگال است یا به عبارتی $\ell^p = \overline{M}$. برای این مطلب کافی است، نشان دهیم برای هر $Y \in \ell^p$ و هر $0 < r$ ، $B_r(Y) \cap M \neq \emptyset$.

$Y = (y_n)_{n\geq 1}$ $\qquad$ $X = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p < r^p \qquad (1)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n|^p$$

چون $Y \in \ell^p$ بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty$ و می‌توان N را به اندازه کافی بزرگ

انتخاب کرد که $\sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n|^p < \frac{1}{2} r^p$. حال برای هر y_n که $1 \leq n \leq N$ عدد گویای

x_n را انتخاب کنید به طوری که $|x_n - y_n| < \left(\frac{1}{2N} r^p\right)^{1/p}$. بدین ترتیب رابطه (1) برقرار است.

مثال l^∞ جدایی‌پذیر نیست.

مجموعه $A = \{ (x_n)_{n=1}^\infty \ : \ x_n \in \{0,1\} \}$ را در نظر بگیرید.

فاصله هر دو عضو A در نرم سوپریمم برابر یک است و گوی‌ها به شعاع $\frac{1}{2}$ به مرکز اعضا A از هم جدا هستند.

بدین ترتیب ناشمارا مجموعه باز جدا از هم خواهیم داشت. اگر M یک زیرمجموعه چگال در l^∞ باشد باید در

هر بازه لااقل یک عضو داشته باشد. یعنی M ناشمارا است.

تعریف ـ اگر (X,d) فضای متریک باشد. دنباله $x_n \in X$ همگرا به $x \in X$

گفته می‌شود هرگاه $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$.

در این صورت می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ در X یا $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

تعریف ـ دنباله $\{x_n\}$ در X را کوشی گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$

$$\exists N \text{ sth. } \quad m, n \geq N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$$

گزاره ـ هر دنباله همگرا کوشی است.

اثبات ـ اگر $x_n \to x$ در X، آنگاه $d(x_n, x) \to 0$ پس برای هر $\epsilon > 0$ تعداد N

وجود دارد که $d(x_n, x) < \epsilon/2$ برای $n \geq N$.

اگر $m, n \geq N$ آنگاه $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon$

تعریف- اگر فضای متریکِ (X, d) این خاصیت را داشته باشد که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، آن را فضای تام می‌نامیم.

مثال- $\mathbb{R}$ یک فضای تام است. همین‌طور $\mathbb{R}^n$ تام است.

مثال- ℓ^∞ یک فضای تام است.

دنباله $X^m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m, \dots) \in \ell^\infty$ کوشی است

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N, \quad m, n \geq N, \quad d_\infty(X^m, X^n) < \epsilon$$

$$\parallel$$

$$\sup_{1 \leq i} |x_i^m - x_i^n| < \epsilon$$

دنباله $\{x_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. طبق آنچه گفتیم این دنباله کوشی است و در نتیجه در $\mathbb{R}$ حد دارد. $x_1^m \to \bar{x}_1$. همینطور برای هر دنباله $\{x_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ حد $\bar{x}_i$ وجود دارد.

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)$$

برای اینکه نشان دهیم ℓ^{∞} تام است باید ثابت کنیم:

$$\bar{X} \in \ell^{\infty} \quad ①$$

$$d_{\infty}(X^m, \bar{X}) \to 0 \quad ②$$

چون $\{X^m\}$ کوشی است پس

$$\forall \epsilon \; \exists N, \; m,n \ge N \qquad d_\infty(X^m, X^n) = \sup_i |x_i^m - x_i^n| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \qquad |x_i^m - x_i^n| < \epsilon$$

اگر اجازه دهیم $n \to \infty$ و با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} x_i^n = \bar{x}_i$ خواهیم داشت

$$(2) \qquad |x_i^m - \bar{x}_i| \le \epsilon \qquad \forall\, m \ge N$$

$$\Rightarrow \quad |\bar{x}_i| \le \epsilon + |x_i^m|$$

چون $X^m \in l^\infty$ و کران دار است. در نتیجه دنباله $\bar{X} = (\bar{x}_i)_{i=1}^\infty$ کران دار و عضوی از l^∞ است.

به علاوه (2) بدین معنا است که $d_\infty(X^m, \bar{X}) \le \epsilon$ و باید $X^m \to \bar{X}$ در l^∞.

مثال - فضای c (دنباله همگرا) تام است.

$c \subseteq l^\infty$ یک زیرمجموعه بسته l^∞ است.

گزاره - هر زیرمجموعه بسته یک فضای تام، خودش به عنوان یک فضای متریک تام است.

مثال - l^p تام است.

مثال - $C[a,b]$ فضای توابع پیوسته با متر سوپریمم فضای تام است. ولی با متر انتگرال تام نیست.