آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه نوزده ۹۹/۹/۳

قضیه نگاشت باز - قضیه گراف بسته - قضیه کران‌داری یکنواخت

قضیه کتگوری بئر

قضیه کتگوری بئر: اگر $X \neq \emptyset$ فضای متریک تام باشد و $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ که A_jها بسته هستند. آنگاه درون یکی از این مجموعه‌های A_j ناتهی است. یا به طور معادل اگر B_j یک دنباله شمارا از مجموعه‌ها باز و چگال در X باشند، آنگاه

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \neq \emptyset$$

تعریف - مجموعه M را در X هیچ‌جا چگال گوییم، هرگاه درون $\overline{M}$ تهی باشد.

مجموعه M را از کتگوری اول (لاغر) گوییم، هرگاه M اجتماع شمارا تا مجموعه هیچ‌جا چگال باشد.

اگر M در کتگوری اول نباشد، آن را عضو کتگوری دوم می‌دانیم.

اگر مکمل M از کتگوری اول باشد (یا به طور معادل M اشتراک شمارا تا مجموعه باز و چگال باشد)

آن را generic می‌نامیم.

با این تعاریف صورت قضیه کتگوری بئر به این شکل بیان می‌شود: «هر فضای متریک تام از کتگوری دوم است».

اثبات - فرض کنید درون همه A_jها تهی باشد. پس $A_1 \neq X$. بنابراین $X - A_1$ باز و ناتهی است.

$$\exists \quad x_1 \in X - A_1 \ , \quad B_{r_1}(x_1) \subseteq X - A_1$$

درون A_2 تهی است $\Rightarrow$ $B_{r_1}(x_1) \cap A_2^c \neq \phi$ $\Rightarrow$ باز و ناتهی

$$\exists\ x_2 \ , \quad \overline{B_{r_2}(x_2)} \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap A_2^c \ , \quad r_2 < \frac{r_1}{2}$$

به همین ترتیب

$$\exists\, x_n \ , \quad \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n^c \ , \quad r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$$

نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. دقت کنید: $\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq B_{r_n}(x_n)$

$$\Rightarrow \quad d(x_n, x_m) \leq r_n \qquad m \geq n$$

بنابراین فرض کنیم $x_n \to x^*$، در نتیجه بنابر $x^* \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ برای هر n دلخواه.

$$\Rightarrow \quad x^* \in A_n^c \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \bigcap_n A_n^c \neq \phi \quad \Rightarrow \quad \bigcup_n A_n \neq X$$

قضیه کران‌داری یکنواخت:

X فضای باناخ، Y فضای نرم‌دار و $T_n : X \to Y$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی و کران‌دار باشد به طوری که برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ در Y کران‌دار باشد. در این صورت $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار است.

$$\|T_n\| \leq M \quad \Rightarrow \quad \|T_n x\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$$

اثبات- $A_k = \{x \in X : \|T_n x\|_Y \le k, \ \forall n\}$ بسته است و فرض قضیه نشان می‌دهد که

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

بنابر قضیه کتگوری بئر درون یکی از $\{A_k\}$ ناتهی است.

$$B(x_0, r) \subseteq A_k \quad \Rightarrow \quad \|T_n(x_0 + ry)\|_Y \le k \quad \forall n, \ \forall y \in B(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \|T_n\| = \sup_{y \in B(0,1)} \|T_n y\|_Y \le \frac{1}{r}\left[k + \|T_n(x_0)\|_Y\right]$$

بنابر فرض قضیه دنباله $\{T_n x_0\}$ کران دار است. درنتیجه برای $\|T_n\|$ یک کران یکنواخت (مستقل از n) وجود دارد.

مثال- شرط باناخ روی فضای X ضروری است. $S_0 \subseteq \ell^{\infty}$ زیرفضای همه دنباله‌های از یکجا به بعد صفر بگیرید.

$$T_n : S_0 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad T_n[(x_i)_{i=1}^{\infty}] = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\left| T_n[(x_i)_{i=1}^{\infty}] \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \cdot \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \|T_n\| \leq n$$

با گرفتن دنباله $(\underbrace{1,1,\dots,1}_{i=n},0,0,\dots)$ می‌توان دید که $\|T_n\| = n$. از طرفی برای هر $\bar{x} \in S_0$

$$\bar{x} = (x_1,\dots,x_N,0,0,\dots) \Rightarrow T_n(\bar{x}) = T_N(\bar{x}) \quad n \geq N$$

پس دنباله $\{T_n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ کران دار است.

مثال- تابع پیوسته‌ای وجود دارد که سری فوریه آن لااقل در یک نقطه واگرا است.

$$f \in C[0,2\pi] \qquad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \;, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

نشان می‌دهیم تابع پیوسته f وجود دارد که سری فوریه آن در نقطه $x=0$ واگرا است.

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sum_{n=-N}^{N} e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \underbrace{\left[1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right]}_{K_N(x)}\, dx$$

عملگر خطی کران‌دار $T_N : C[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $T_N f = S_N$

تعریف کنید. اگر برای همه توابع پیوسته سری فوریه در نقطه $x=0$ همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{T_N f\}_{N=0}^{\infty}$ کران‌دار است.

و بنابر قضیه کران‌داری یکنواخت $\{\|T_N\|\}$ کران‌دار هستند.

لذا تنها کافی است نشان دهیم $\|T_N\| \to \infty$.

$$T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, K_N(x)\, dx$$

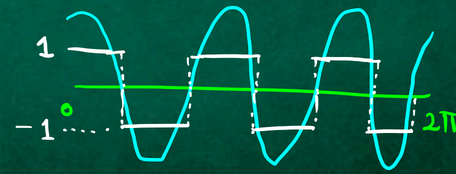
$$\Rightarrow |T_N(f)| \le \frac{\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(x)|\, dx$$

$$\Rightarrow \|T_N\| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(x)|\, dx$$

$$K_N(x)\sin x/_2 = \sin x/_2 + \sum_{n=1}^{N} 2\sin x/_2 \cos nx$$

$$= \sin x/_2 + \sum_{n=1}^{N} \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-1/_2)x \quad = \sin(N+\tfrac{1}{2})x$$

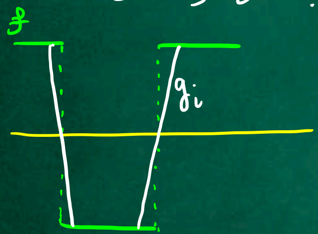
$$\Rightarrow K_N(x) = \frac{\sin(N+1/_2)x}{\sin\frac{x}{2}}$$



اگر قرار دهیم $f(x) = \mathrm{sgn}(K_N(x)) = \begin{cases} +1 & K_N(x) \geq 0 \\ -1 & K_N(x) < 0 \end{cases}$ آنگاه

$$T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(x)|\, dx$$

تابع f پیوسته نیست در حالی که T_N روی $C[0, 2\pi]$ تعریف شده است. برای رفع این مشکل دنباله



توابع پیوسته g_i را می‌سازیم که $\|g_i\|_\infty = 1$ و $\|g_i - f\|_2 \to 0$

$$|T_N(g_i) - T_N(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (g_i - f)\, K_N(x)\, dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|g_i - f\|_2 \cdot \|K_N\|_2 \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad T_N(g_i) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(x)|\, dx \quad \Rightarrow \|T_N\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(x)|$$

$$2\pi \| T_N \| = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (N+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx > \int_0^{2\pi} \frac{|\sin (N+\frac{1}{2})x|}{\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{|\sin y|}{\frac{y}{2N+1}} \frac{dy}{N+\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy = 2 \sum_{i=0}^{2N} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy$$

$$> 2 \sum_{i=0}^{2N} \frac{1}{(i+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin y| \, dy = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{2N} \frac{1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad \| T_N \| \longrightarrow +\infty$$

نتیجه- اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای X باشد، به طوری که برای هر $f \in X'$ دنباله $\{f(x_n)\}$ کراندار باشد، آنگاه $\{x_n\}$ در X کراندار است.

$$T_n : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T_n(f) = f(x_n) \Rightarrow \|T_n\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(x_n)|}{\|f\|_{X'}} = \|x_n\|_X$$

قضیهٔ نگاشت باز:

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T: X \to Y$ عملگر خطی کراندار که پوشا است. در این صورت T نگاشت باز است. در نتیجه اگر T یک نگاشت دوسویی باشد، آنگاه T^{-1} پیوسته و در نتیجه کراندار است.

نکته- تابع $f: X \to Y$ پیوسته است اگر و هر باز $U \subseteq Y$، مجموعه $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

تابع f را باز گوییم، هرگاه تصویر هر باز $V \subseteq X$ تحت f باز باشد. یعنی مجموعه $f(V)$ در Y باز است.

$$\forall x_0 \in V \quad \exists r>0 \quad B_r(f(x_0)) \subseteq f(V)$$

اگر f وارون پذیر باشد و در ضمن یک نگاشت باز باشد، آنگاه f^{-1} پیوسته است.

نکته- اگر T نگاشت دوسوی کران دار باشد، بنابر قضیه نگاشت باز، T^{-1} پیوسته است و

$$\|T^{-1}y\|_X \leq C\|y\|_Y$$

اگر قرار دهیم $y = Tx$ ،

$$\frac{1}{C}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$$

از طرفی پیوستگی T نتیجه می دهد

$$\frac{1}{C}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq \tilde{C}\|x\|_X$$

بنابراین $x \longmapsto \|Tx\|_Y$ یک نرم روی فضای برداری X تعریف می کند که هم ارز با نرم $\|\cdot\|_X$ است.

مثال- فرض باناخ بودن X و Y ضروری است. $X = Y = S_0 \subseteq \ell^\infty$ زیرفضای دنباله‌ای از یکجا به بعد صفر.

$$T(\bar{x}) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

$$\|T\| = 1$$

$$T^{-1}(e_n) = n e_n$$

بنابراین T^{-1} کران‌دار نیست.

مثل- $X = C[0,1]$ با نرم سوپریمم . $Y = C[0,1]$ با نرم انتگرالی $\|\cdot\|_1$.

X باناخ است ولی Y باناخ نیست .

$T : X \longrightarrow Y$ نگاشت همانی بگیرید .

$$\|T(f)\|_Y \leq C \|f\|_X \qquad \forall f \in C[0,1]$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \|f\|_\infty$$

T^{-1} پیوسته نیست . درواقع دنباله توابع پیوسته f_n وجود دارد که $\|f_n\|_\infty = 1$ ولی $\|f_n\|_1 \to 0$

$$f_n(t) = t^n \rightarrow \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\|f_n\|_\infty = 1 \Rightarrow \|T^{-1} f_n\|_\infty \not\leq C \|f_n\|_1$$