آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه هجده ۹۹/۹/۱

فضاهای بازتابی

نشاندن طبیعی $\quad j : X \longrightarrow X''$

X فضای برداری نرم‌دار ، X'' دوگان X'

$$\langle j(x), f \rangle_{X'', X'} = \langle f, x \rangle_{X', X}$$

$$|\langle j(x), f \rangle| = |\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \quad j(x) \in X'', \quad \|j(x)\|_{X''} = \underbrace{\sup_{f \neq 0} \frac{|\langle j(x), f \rangle|}{\|f\|_{X'}}} \leq \|x\|_X$$

$$\sup_{0 \neq f} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \|x\|_X$$

نتایج قضیه هان ـ باناخ

$$\|j(x)\|_{X''} = \|x\|_X$$

درنتیجه $j(X) \cong X$ به طور ایزومتری یکریخت است. (منظور از $j(X)$، تصویر نگاشت j است)

تعریف- فضای برداری X را بازتابی (Reflexiv) گوییم، هرگاه نگاشت j پوشا باشد. ($j(X)=X''$)

درنتیجه باید $X \cong X''$. برعکس این مطلب درست نیست. فضاهایی وجود دارد که $X \cong X''$ ولی X بازتابی نیست.

مثال- هر فضای برداری بعد متناهی، بازتابی است. زیرا اگر $\dim X = n$ آنگاه $\dim X' = \dim X'' = n$ و درنتیجه

$\dim(j(X)) = n$ و باید $j(X) = X''$.

مثال- فضاهای هیلبرت انعکاسی هستند.

بنابر قضیه نمایش ریس، یکریختی‌های $\ell_H : H \to H'$ و $\ell_{H'} : H' \to H''$ وجود دارد

$$\langle \ell_H(x), y \rangle_{H', H} = (y, x)_H$$

$$\langle \ell_{H'}(f), g \rangle_{H'', H'} = (g, f)_{H'}$$

روی H' ضرب داخلی زیر القا می‌شود:

$$(f,g)_{H'} = (\tau_H^{-1} g, \tau_H^{-1} f)_H$$

دقت کنید $\tau_H(\alpha x) = \bar{\alpha}\, \tau_H(x)$

ادعا می‌کنیم که $J = \tau_{H'} \circ \tau_H$

$$\begin{aligned}
\langle \tau_{H'}(\tau_H(x)), g \rangle_{H'', H'} &= (g, \tau_H(x))_{H'} \\
&= (x, \tau_H^{-1} g)_H \\
&= \langle g, x \rangle_{H', H} \\
&= \langle J(x), g \rangle_{H'', H'}
\end{aligned}$$

گزاره

ℓ^p اگر $1<p<\infty$ بازتابی هستند.

می‌دانیم $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ یکریختی ایزومتری $T_q^p:\ell^q\longrightarrow(\ell^p)'$ وجود دارد

$$\langle T_q^p y\,,\,x\rangle_{(\ell^p)',\ell^p}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$$

همچنین یکریختی ایزومتری $T_p^q:\ell^p\longrightarrow(\ell^q)'$ نیز برقرار است.

اگر $f\in(\ell^p)''$ باید $f:(\ell^p)'\longrightarrow\mathbb{R}$ بنابراین $f\circ T_q^p:\ell^q\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابعک خطی کران‌دار است

$$\begin{tikzcd} (\ell^p)' \\ \ell^q \arrow[u, "T_q^p"'] \end{tikzcd}$$

درنتیجه $f\circ T_q^p\in(\ell^q)'$. درنتیجه $(T_p^q)^{-1}(f\circ T_q^p)\in\ell^p$

ادعا: $j\left[(T_p^q)^{-1}(f\circ T_q^p)\right]=f$

قرار دهید $x=(T_p^q)^{-1}(f\circ T_q^p)$ ، باید نشان دهیم:

$$\langle f,u\rangle_{(\ell^p)'',(\ell^p)'} = \langle u,x\rangle_{(\ell^p)',\ell^p} \qquad \forall u\in(\ell^p)'$$

$$T_p^q x = f\circ T_q^p \in(\ell^q)' \quad , \qquad T_q^p y = u \in (\ell^p)'$$

که $y\in\ell^q$.

$$\langle u,x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \langle T_p^q x, y\rangle_{(\ell^q)',\ell^q}$$

$$= f\circ T_q^p(y) = f(u)$$

$$T_q^p : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$$

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow (T_q^p)^\times : (\ell^p)'' \arrow[r] & (\ell^q)' \arrow[r, "(T_p^q)^{-1}"] & \ell^p \arrow[ll, bend left, "J"]
\end{tikzcd}$$

$$J = \left[(T_p^q)^{-1} \circ (T_q^p)^\times \right]^{-1}$$

تمرین - نشان دهید

$$= \left((T_q^p)^{-1} \right)^\times \circ T_p^q$$

نکته. ℓ^1 و ℓ^∞ بازتابی نیستند.

$$T_\infty^1 : \ell^\infty \xrightarrow{\text{یکریختی}} (\ell^1)' \quad , \quad T_1^\infty : \ell^1 \xrightarrow[\text{پوشا نیست}]{\text{ایزومتری}} (\ell^\infty)'$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که چرا ℓ^1 بازتابی نیست.

قضیه- اگر X فضای برداری نرم‌دار باشد و X' جدایی‌پذیر، آنگاه X نیز جدایی‌پذیر است.

اثبات- فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ در X' چگال باشد. دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر بسازید:

$$\exists x_n \;,\quad \|x_n\| = 1 \;,\quad |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$$

می‌دانیم $Y = \overline{\operatorname{Span}\{x_n\}}$ جدایی‌پذیر است. (چرا؟) نشان می‌دهیم $X = Y$. فرض کنید $x_0 \in X \setminus Y$

بنابر یکی از نتایج هان-باناخ تابعک $f \in X'$ وجود دارد که

$$\|f\| = 1 \;,\quad f|_Y = 0 \;,\quad f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$$

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \le |f_n(x_n)| = \left|(f-f_n)(x_n)\right| \le \|f-f_n\| \cdot \|x_n\| = \|f-f_n\|$$

چون $\{f_n\}$ چگال است ، یک زیردنباله وجود دارد که $\|f-f_{n_k}\| \to 0$. بنابراین بنابر $\|f_{n_k}\| \to 0$

$$\Rightarrow \quad f = 0$$

و این تناقض دارد با اینکه $\|f\|=1$.

قضیه زیر نشان می‌دهد که ℓ^∞ بازتابی نیست. (چرا؟)

قضیه- اگر X باناخ باشد، آنگاه X بازتابی است اگر و تنها اگر X' بازتابی باشد.

اثبات: $\Leftarrow$

$$J_X : X \xrightarrow{\text{یکریختی}} X''$$

$$J_{X'} : X' \longrightarrow X'''$$

$\varphi \in X'''$ دلخواه در نظر بگیرید و تعریف کنید:

$$f(x) := \langle \varphi , j_X(x) \rangle_{X''',X''} \qquad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \quad f \in X'$$

ادعا: $j_{X'}(f) = \varphi$.

باید نشان دهیم:

$$\langle \underset{\varphi}{\cancel{j_{X'}(f)}}, j_X(x) \rangle_{X''',X''} = \langle j_X(x), f \rangle_{X'',X'}$$

$$= \langle f , x \rangle_{X',X}$$

که تعریف تابعک f است.

برای اثبات برعکس قضیه از لم زیر استفاده می‌کنیم :

لم - اگر X فضای بازتابی باشد و $M \subseteq X$ زیرفضای بسته آن ، آنگاه M نیز بازتابی است.

اثبات قضیه $\Leftarrow$: X' بازتابی است $\Leftarrow$ X'' بازتابی است . $\Leftarrow$ $X'' \supseteq M = J_X(X)$ بازتابی است.

چون X یکریخت با M است بنابراین X نیز بازتابی است.