# آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه هفده ۹۹/۸/۲۶

## عملگرهای الحاقی (adjoint)

X و Y دو فضای برداری نرم دار باشند و $T: X \longrightarrow Y$ خطی و کراندار

$T^{\times}: Y' \longrightarrow X'$ عملگر الحاقی T نامیده می‌شود هرگاه

$$\langle T^{\times}(g), x \rangle_{X',X} = \langle g, Tx \rangle_{Y',Y}$$

وقتی T روی فضاهای هیلبرت تعریف شده باشد، به کمک قضیه نمایش ریس تعریف ساده‌تری از عملگر الحاقی ارائه می‌شود:

$T: H_1 \longrightarrow H_2$

$$\begin{tikzcd}
T^{\times}: H_2' \arrow[r] & H_1' \\
T^*: H_2 \arrow[r] \arrow[u, "\tau_{H_2}", "\wr"'] & H_1 \arrow[u, "\tau_{H_1}"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

$$\langle \tau_H(y), x \rangle_{H',H} = (x,y)_H$$

$$\langle \underbrace{\tau_{H_1}(T^*(y))}_{T^{\times}(\tau_{H_2}(y))}, x \rangle_{H_1',H_1} = (x, T^* y)_{H_1}$$

$$\|$$

$$\langle \tau_{H_2}(y), Tx \rangle_{H_2',H_2} = (Tx, y)_{H_2}$$

تعریف- متناظر عملگر خطی و کران دار $T: H_1 \longrightarrow H_2$ روی فضاهای هیلبرت $H_1$ و $H_2$ ، عملگر الحاقی

$$T^*: H_2 \longrightarrow H_1$$

با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T^* y)_{H_1} \quad \forall x \in H_1, \ y \in H_2$$

مثال- $H_1 = \mathbb{C}^n$ و $H_2 = \mathbb{C}^m$ ، $T$ ماتریس $m \times n$

$$\left.\begin{aligned} (Tx, y)_{H_2} &= \bar{y}^t T x \\ (x, T^* y)_{H_1} &= (\overline{T^* y})^t x = \bar{y}^t \, \overline{T^*}^t x \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \overline{T^*}^t \Rightarrow T^* = \bar{T}^t$$

سؤال: چرا عملگر $T^*$ وجود دارد که در رابطه بالا صدق کند؟ چرا این عملگر یکتا است؟

جواب اول: به کمک تعریف $T^\times$ دیدیم که $T^* = \tau_{H_1}^{-1} \circ T^\times \circ \tau_{H_2}$ . بنابر وجود $T^*$ بدیهی است.

<u>جواب دوم</u>: بدون توجه به $T^*$. قرار دهید $h(y,x)=(y,Tx)_{H_2}:H_2\times H_1\longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ فرم دوخطی (یک‌ونیم‌خطی)

که پیوسته است:

$$(1)\qquad |h(y,x)|\le |(y,Tx)_{H_2}|\le \|y\|_{H_2}\cdot\|Tx\|_{H_2}\le \|y\|_{H_2}\|T\|\cdot\|x\|_{H_1}$$

بنابر قضیه‌ی نمایش ریس، عملگر $T^*:H_2\longrightarrow H_1$ وجود دارد که

$$h(y,x)=(T^*y,x)_{H_1}$$

$$\Rightarrow\quad (y,Tx)_{H_2}=(T^*y,x)_{H_1}$$

$$\Rightarrow\quad (Tx,y)_{H_2}=(x,T^*y)_{H_1}$$

به‌علاوه $\|T^*\|=\|h\|$. از طرفی از (1) نتیجه می‌شود که $\|h\|\le\|T\|$. اگر قرار دهیم $y=Tx$

$$|h(Tx,x)|=\|Tx\|^2_{H_2}\le\|h\|\cdot\|Tx\|\cdot\|x\|\quad\Rightarrow\quad \|Tx\|\le\|h\|\cdot\|x\|$$

$$\Rightarrow\quad \|T\|\le\|h\|$$

درستی $\|T^*\| = \|T\|$.

یکتایی: فرض کنید $T_1^*$ و $T_2^*$ در تساوی زیر صدق کنند:

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T_1^* y)_{H_1} = (x, T_2^* y)_{H_1}$$

$$\Longrightarrow \quad (x, (T_1^* - T_2^*) y)_{H_1} = 0 \qquad \forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

$$x = (T_1^* - T_2^*) y \quad \Longrightarrow \quad \|(T_1^* - T_2^*) y\|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad T_1^* = T_2^*$$

مثال- $H=\ell^2$ , $R:\ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$$R(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$$

$$(Rx,y)_{\ell^2}=(x,R^*y)_{\ell^2} \quad \forall\, x,y\in\ell^2$$

$$\big((0,x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots)\big)=x_1y_2+x_2y_3+\cdots$$

$$R^*y=z \quad \Rightarrow \quad = z_1x_1+z_2x_2+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad z_1=y_2,\ z_2=y_3,\ \dots$$

$R^*y=(y_2,y_3,\dots) \Rightarrow R^*=L$ شیفت به چپ

مثال- $L:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ شیفت به چپ باشد،

$$(Lx,y)_{\ell^2}=(x,L^*y)_{\ell^2}$$

$x_2y_1+x_3y_2+\cdots = x_1z_1+x_2z_2+\cdots \quad \Rightarrow \quad z_1=0,\ z_2=y_1,\ z_3=y_2 \Rightarrow L^*y=(0,y_1,y_2,\dots)$

$T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ حل-

$$T[(x_n)_{n=1}^{\infty}] = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$$

$$(Tx, y) = \big((a_n x_n), (y_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n y_n$$

$$(x, T^* y) = \big((x_n), (z_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$$

$$\Rightarrow z_n = a_n y_n \Rightarrow T^* y = (a_n y_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow T^* = T$$

## خواص عملگر الحاقی

$T: H_1 \longrightarrow H_2$ , $S: H_1 \longrightarrow H_2$

(1) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(2) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(3) $(T^*)^* = T$

(4) $\| T^* T \| = \| T T^* \| = \| T \|^2$

(5) $T^* T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

(6) $(TS)^* = S^* T^*$ . در این حالت فرض کنید $S: H_0 \to H_1$ تعریف شده است.

(7) اگر $H_1 = H_2$ و $T$ وارون پذیر آنگاه $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

(8) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ , $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

اثبات (1)

$$((T+S)x, y) = (x, (T+S)^* y)$$

$$\parallel$$

$$(Tx, y) + (Sx, y) = (x, T^* y) + (x, S^* y) = (x, (T^* + S^*) y)$$

$$\Rightarrow (T+S)^* = T^* + S^*$$

(2)

$$((\alpha T)x, y) = (x, (\alpha T)^* y)$$

$$\parallel$$

$$(\alpha (Tx), y) = \alpha (Tx, y) = \alpha (x, T^* y) = (x, \bar{\alpha} T^* y)$$

$$\Rightarrow (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

(3) تمرین

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \tag{4}$$

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^*Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2$$

کوشی شوارتز

$$\Rightarrow \quad \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$$

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$$ برعکس

(5) از (4) نتیجه می‌شود.

$$((TS)x, y) = (x, (TS)^*y) \tag{6}$$

$$\|$$

$$(T(Sx), y) = (Sx, T^*y) = (x, S^*T^*y)$$

$$\Rightarrow (TS)^* = S^*T^*$$

(7) از (6) نتیجه می‌شود.

$$y \in \operatorname{Ker} T^* \iff T^* y = 0 \iff 0 = (x, T^* y)_{H_1} = (Tx, y)_{H_2} \quad \forall x \in H_1 \qquad (8)$$

$$\iff Tx \perp y \quad \forall x \in H_1$$

$$\iff y \perp \operatorname{Im} T$$

$$\iff y \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$$

بعلاوه $\operatorname{Ker}(T^*)^* = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$ و بنابر 3 $(T^*)^* = T$.

$$\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$$

نکته - $T: H_1 \longrightarrow H_2$ . فرض کنید می خواهیم معادله $Tx = b$ را حل کنیم برای بردار $b \in H_2$ .

شرط وجود جواب این معادله این است که $b \in \operatorname{Im} T$ .

خاصیت (8) بیان می کند که این شرط معادل است با اینکه $b \perp \operatorname{Ker} T^*$ یا به عبارتی

$$(b, y)_{H_2} = 0 \qquad \forall y \ \text{s.th.} \quad T^* y = 0$$

به علاوه بعد فضای جواب معادله $Tx = b$ برابر بعد $\operatorname{Ker} T$ است که از خاصیت (8) نتیجه می شود

$$\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T^* \text{ نقص بعد}$$

$$\operatorname{Im} T^* \oplus \underbrace{(\operatorname{Im} T^*)^{\perp}}_{\operatorname{Ker} T} = H_1$$

تعریف- عملگر $T: H \to H$ را خود الحاق (هرمیتی) گوییم هرگاه $T = T^*$.

آن را یکانی گوییم هرگاه $T^* = T^{-1}$. این عملگرها حافظ طول و زاویه هستند.

عملگر $T$ را نرمال گوییم، هرگاه $TT^* = T^*T$.

واضح است که هر عملگر خودالحاق یا یکانی، نرمال است.

مثال- $T = \alpha I \Rightarrow T^* = \bar{\alpha} I$ بنابراین $T$ خودالحاق است $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ این عملگر نرمال است. به علاوه $T$ یکانی است $\Leftrightarrow |\alpha| = 1$

مثال- اگر $L: l^2 \to l^2$ عملگر شیفت به چپ باشد، دیدیم که $L^* = R$.

$L^*L(x) = RL(x) = (0, x_2, x_3, \dots) \neq I$ , $LL^* = LR = I$

$L$ نرمال نیست.

گزاره: اگر $T: H \longrightarrow H$ خطی و کران‌دار باشد، آنگاه

(1) اگر $T$ خودالحاق باشد، مقدار $(Tx, x)$ برای هر $x \in H$ یک عدد حقیقی است.

(2) برعکس وقتی درست است که $H$ یک فضای برداری مختلط باشد.

اثبات.
$$(Tx,x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = \overline{(Tx,x)}$$

بنابراین $(Tx, x)$ یک عدد حقیقی است.

برعکس:
$$\overline{(Tx,x)} = (Tx, x) = (x, T^*x)$$
$$\overline{(Tx,x)} = (x, Tx)$$

$$\Rightarrow \quad (x, (T-T^*)x) = 0 \qquad \forall x \in H$$

بنابر لم صفحه قبل
$$\Rightarrow \qquad T - T^* = 0$$

لم - $S : H \to H$ که $(x, Sx) = 0$ برای هر $x \in H$. اگر $H$ فضای برداری مختلط باشد، آنگاه $S=0$.

$$0 = \big(x+y, S(x+y)\big) = \underbrace{\cancel{(x, Sx)}}_{0} + (x, Sy) + (y, Sx) + \underbrace{\cancel{(y, Sy)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad (x, Sy) = -(y, Sx) \qquad \forall x, y \in H$$

در این رابطه به جای $x$ قرار دهید $ix$.

$$\Rightarrow \quad \underset{\displaystyle i(x, Sy)}{\underset{\shortparallel}{(ix, Sy)}} = -\big(y, S(ix)\big) = -\bar{i}\,(y, Sx)$$

$$\Rightarrow \quad (x, Sy) = (y, Sx)$$

با مقایسه با رابطه اول نتیجه می‌شود

$$(x, Sy) = 0 \quad \forall x, y$$

$$\Rightarrow \quad S = 0$$

مثال- اگر $S$ یک دوران $\pi/2$ درجه‌ای باشد، آنگاه $(x, Sx) = 0$ برای هر $x$. این مثال نشان می‌دهد که شرط میدان مختلط برای فضای برداری ضروری است.

گزاره: اگر $T$ و $S$ دو عملگر خودالحاق باشند، آنگاه $TS$ خودالحاق است اگر و تنها اگر $TS = ST$.

$$TS \overset{?}{=} (TS)^* = S^* T^* = ST$$

گزاره: مجموعه عملگرهای خودالحاق یک زیرمجموعه بسته از $B(H)$ است.

اثبات- اگر دنباله $\{T_n\}$ از عملگرهای خودالحاق به عملگر $T \in B(H)$ همگرا باشد،

$$\|T_n - T\| \to 0$$

چون $T_n^* = T_n$ و $\|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$

$$\Rightarrow \quad (T_n - T)^* = T_n - T^* \to 0 \qquad \Rightarrow T = \lim T_n = T^*$$

گزاره- اگر $T$ نرمال باشد، آنگاه $\|Tx\| = \|T^*x\|$ و برعکس آن وقتی درست است که $H$ فضای برداری مختلط باشد.

اثبات- $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) = (x, TT^*x) = (T^*x, T^*x)$

$= \|T^*x\|^2$

خاصیت نرمال بودن $T$

تعریف عملگر الحاق

برعکس از تساوی $\|Tx\| = \|T^*x\|$ و محاسبه بالا نتیجه می‌شود

$$(x, T^*Tx) = (x, TT^*x) \quad \forall x \in H$$

$$\xRightarrow{\text{لم دو صفحه قبل}} T^*T = TT^*$$

نتیجه- اگر $T$ نرمال باشد، $\|T^2\| = \|T\|^2$

$$\|T^2x\| = \|T(Tx)\| = \|T^*(Tx)\| \Rightarrow \|T^2\| = \|T^*T\|$$

گزاره بالا

بنابر یکی از گزاره‌های قبل برای هر عملگر $T$ داریم $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

گزاره - عملگرهای یکانی $U$ و $V$ را در نظر بگیرید، آنگاه

(1) $U$ ایزومتری است یعنی $\|Ux\| = \|x\|$ برای هر $x\in H$.

(2) $\|U\| = 1$ به شرط آنکه $H \neq \{0\}$.

(3) $UV$ یکانی است.

(4) $U^* = U^{-1}$ نیز یکانی است.

اثبات- $\|Ux\|^2 = (Ux,Ux) = (x,U^*Ux) = (x,U^{-1}Ux) = (x,x) = \|x\|^2$

قضیه- (1) اگر $U$ ایزومتری باشد و $H$ فضای برداری مختلط آنگاه $U^*U = I$.

(2) $U$ یکانی است اگر و تنها اگر ایزومتری و پوشا باشد.

اثبات- از اثبات گزاره قبل نتیجه می‌شود: $\forall x\in H \quad (x,U^*Ux) = (x,x) \Rightarrow U^*U = I$.

$\Downarrow$

$U$ یک به یک است

حال اگر $U$ پوشا نیز باشد، آنگاه $U^{-1}$ وجود دارد، درنتیجه $U^* = U^{-1}$.