آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه شانزده ۹۹/۸/۲۴

چندجمله‌ای هرمیتی:

فضای توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ می‌گیریم که خارج یک مجموعه فشرده صفر هستند. هر عضوی از این فضا را با یک ترکیب خطی از $C_0(-\infty,+\infty)$ توابع $\{e^{-t^2/2}t^n\}_{n=0}^{\infty}$ می‌توان تقریب زد. (با نرم سوپریمم) دقت کنید این توابع عضو $C_0(-\infty,+\infty)$ نیستند.

فضای $C_0(-\infty,\infty)$ در $L^2(-\infty,\infty)$ بسته است. توابع $\{e^{-t^2/2}t^n\}_{n=0}^{\infty}$ با نرم $\|\cdot\|_2$ در این فضا وارد شوند و مستقل خطی هستند. از طرفی چون هر عضو $C_0(-\infty,+\infty)$ را می‌توان با این توابع تقریب زد، پس

$$\mathrm{Span}\{e^{-t^2/2}t^n\}_{n=0}^{\infty} = L^2(-\infty,\infty)$$

درنتیجه این دنباله یک پایه شادر برای $L^2(\mathbb{R})$ است. اگر این توابع را با روش گرام-اشمیت متعامد یکه کنیم به توابع به شکل زیر می‌رسیم:

$$e_n(t) = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t)$$

که $H_n(t)$ یک چندجمله‌ای درجه n است و به آنها چندجمله‌ای هرمیتی می‌گوییم.

بنابراین برای هر $f \in L^2(\mathbb{R})$ داریم:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-t^2/2} H_n(t)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-t^2/2} H_n(t) \, dt$$

ادعا: $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$ ، $H_0(t) = 1$.

که به صورت استقرایی نتیجه می‌دهد:

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^j}{j!(n-2j)!} t^{n-2j}$$

$H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$

$H_2(t) = 4t^2 - 2$ $H_3(t) = 8t^3 - 12t$

نکته- از ادعای بالا نتیجه می‌شود که H_n در معادله دیفرانسیل $H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0$ صدق می‌کند و بنابر تئوری‌ای در معادلات دیفرانسیل یک پایه متعامد یکه از توابع ویژه این عملگر (که H_nها هستند) وجود دارد.

<u>اثبات ادعا:</u> سمت راست تساوی را برابر $K_n(t)$ تعریف کنید.

واضح است که K_n چندجمله‌ای درجه n است. نشان می‌دهیم $e^{-t^2/2} K_n$ بر همه توابع به صورت

$e^{-t^2/2} \times$ (چندجمله‌ای درجه $n-1$) عمود است.

ابتدا به صورت استقراء نشان می‌دهیم $K_n' = 2n K_{n-1}$. (هرچند به صورت ساده‌تر از سری صفحه قبل

این رابطه اثبات می‌گردد.) وقتی $n=0$، از تساوی $K_0=1$ و $K_1=2t$ رابطه بالا برقرار است.

فرض کنید برای n رابطه بالا برقرار است و برای $n+1$ بررسی می‌کنیم.

$$K_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \Rightarrow K_n' = 2t K_n - K_{n+1}$$

$$\Rightarrow K_{n+1} = 2t K_n - K_n' \underset{\text{فرض استقراء}}{=} 2t K_n - 2n K_{n-1}$$

$$\Rightarrow K_{n+1}' = 2K_n + 2t K_n' - 2n K_{n-1}' = 2K_n + 4tn K_{n-1} - 2n\left(2t K_{n-1} - K_n\right) = 2(n+1)K_n$$

برای $m\leq n$ داریم:

$$\langle e^{-t^2/2} K_n , e^{-t^2/2} K_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} K_n(t) K_m(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\, K_m(t)\, dt$$

$$= \cancel{\Big[(-1)^n \underbrace{\frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}}(e^{-t^2})\, K_m(t)}_{e^{-t^2} \times \text{چندجمله‌ای درجه } m+n-1} \Big]_{t=-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}}(e^{-t^2})\, K_m'(t)\, dt$$

$$0$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, 2m\, \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}}(e^{-t^2})\, K_{m-1}(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+m}\, 2^m\, m!\, \frac{d^{(n-m)}}{dt^{n-m}}(e^{-t^2})\, dt = \begin{cases} 0 & n > m \\ (-1)^{2n}\, 2^n\, n!\, \sqrt{\pi} & n = m \end{cases}$$

(جهت یادآوری: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$)

در نتیجه $e^{-t^2/2}K_n$ بر زیرفضای تولید شده توسط $\{e^{-t^2/2}\, t^m\}_{m=0}^{n-1} = \{e^{-t^2/2} K_m\}_{m=0}^{n-1}$

عمود است و چون $\deg K_n = \deg H_n = n$ پس $e^{-t^2/2}K_n$ موازی $e^{-t^2/2}H_n$ است. از طرفی

$$\|e^{-t^2}K_n\|_2 = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{1/2} = \|e^{-t^2}H_n\|_2$$

لذا داریم $K_n = \pm H_n$. از طرفی ضریب بزرگترین جمله H_n عددی مثبت است. و ضریب بزرگترین جمله K_n برابر 2^n

است. (از رابطه $K_n' = 2n K_{n-1}$ به دست می‌آید) لذا باید $K_n = H_n$.

تمرین ـ مشابه قبل فضای $L^2(0,\infty)$ را تعریف کنید. نشان دهید $\{e^{-t/2}\, t^n\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه شائودر برای این فضا است.

و اگر به روش گرام-اشمیت این پایه را متعامد یکه کنیم، دنباله توابع $e_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$ به دست می‌آید.

L_n چندجمله‌ای درجه n است که به آن چندجمله‌ای لاگر گفته می‌شود. اثبات کنید: $L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right)$

تابعک‌های خطی روی فضای هیلبرت

اگر H یک فضای هیلبرت باشد، برای هر عضو $u \in H$ دلخواه تابعک خطی زیر را می‌توانیم بسازیم:

$$f : H \longrightarrow K = \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

$$f(x) = (x, u)_H$$

$$\Rightarrow \; |f(x)| = |(x,u)_H| \leq \|x\|_H \cdot \|u\|_H$$

نامساوی کوشی-شوارتز

$$\Rightarrow \; \|f\|_{H'} \leq \|u\|_H$$

از طرفی $\dfrac{|f(u)|}{\|u\|_H} = \dfrac{|(u,u)_H|}{\|u\|_H} = \|u\|_H$ بنابراین $\|f\|_{H'} = \|u\|_H$

قضیه نمایش ریس: هر تابعک خطی پیوسته f را روی فضای هیلبرت H به صورت یکتا به شکل

$$\langle f, x \rangle = (x, u)_H$$

می‌توان نمایش داد و به علاوه $\|f\|_{H'} = \|u\|_H$.

اثبات - $Nul f \subseteq H$ یک زیرفضای بسته است. اگر $Nul f = H$ که $f \equiv 0$. در این صورت $u = 0$ خواهد بود.

اگر $Nul f \subsetneq H$، آنگاه بردار $0 \neq z \in (Nul f)^{\perp}$ وجود دارد. برای هر $x \in H$ دلخواه قرار دهید

$$v = f(x) z - f(z) x \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \in Nul f$$

$$\Rightarrow (v, z)_H = 0 \Rightarrow f(x) \|z\|_H^2 - f(z) (x, z)_H = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x, u)_H \quad , \quad u = \overline{\frac{f(z)}{\|z\|_H^2}} z$$

اثبات یکتایی: فرض کنید

$$f(x) = (x, u_1) = (x, u_2)$$

$$\Rightarrow (x, u_1 - u_2) = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$$

نتیجه: از قضیه نمایش ریس نتیجه می‌شود که ایزومتری $i_H : H \longrightarrow H'$ وجود دارد که پوشا نیز هست.

$$\langle i_H(u), x \rangle_{H', H} = (x, u)_H$$

تعریف- فرم دوخطی (یا یک و نیم خطی) تابع $h: X \times Y \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ با خواص زیر را یک فرم دوخطی (یک و نیم خطی) گوییم:

(۱) $h(x,y)$ نسبت به مؤلفه اول خطی است.

$$h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)$$

(2) $h(x,y)$ نسبت به مؤلفه دوم مزدوج خطی است.

$$h(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} h(x, y_1) + \bar{\beta} h(x, y_2)$$

این فرم دوخطی را پیوسته (یا کران‌دار) گوییم، هرگاه ثابت c وجود داشته باشد که

$$|h(x,y)| \leq c \|x\|_X \cdot \|y\|_Y$$

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|_X \cdot \|y\|_Y} = \sup_{\substack{\|x\|_X = 1 \\ \|y\|_Y = 1}} |h(x,y)|$$

تعمیم قضیه نمایش ریس : اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند و $h: H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ فرم دو خطی

(یا یک و نیم خطی) کراندار باشد، آنگاه عملگر خطی پیوسته $S: H_1 \to H_2$ وجود دارد که

$$h(x,y) = (Sx, y)_{H_2}$$

به علاوه $\|h\| = \|S\|$.

اثبات. برای هر $x \in H_1$ دلخواه و ثابت $y \mapsto \overline{h(x,y)}$ یک عملگر خطی کراندار روی H_2 است. (چرا؟)

بنابر نمایش ریس عنصر یکتای $u \in H_2$ وجود دارد که

$$\overline{h(x,y)} = (y, u)_{H_2} \Rightarrow h(x,y) = (u, y)_{H_2}$$

عنصر u به x وابسته است و آن را با Sx نشان می‌دهیم. در نتیجه $S: H_1 \to H_2$ خوش تعریف است که

$$h(x,y) = (Sx, y)_{H_2} \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

نشان می‌دهیم S یک عملگر خطی است.

$$S(\alpha x_1+\beta x_2) \stackrel{?}{=} \alpha Sx_1+\beta Sx_2$$

$$h(\alpha x_1+\beta x_2, y) = (S(\alpha x_1+\beta x_2), y)_{H_2} \qquad \forall y\in H_2$$

$$\|$$

$$\alpha h(x_1,y)+\beta h(x_2,y) = \alpha (Sx_1, y)_{H_2} + \beta (Sx_2,y)_{H_2}$$

$$= (\alpha Sx_1+\beta Sx_2, y)_{H_2}$$

$$\Longrightarrow S(\alpha x_1+\beta x_2) = \alpha Sx_1+\beta Sx_2$$

S یک عملگر خطی کراندار است. زیرا:

$$|(Sx,y)_{H_2}| = |h(x,y)| \le \|h\|\cdot\|x\|_{H_1}\cdot\|y\|_{H_2}$$

$$y=Sx \Rightarrow \|Sx\|^2_{H_2} \le \|h\|\cdot\|x\|_{H_1}\cdot\|Sx\|_{H_2} \Rightarrow \|Sx\|_{H_2}\le \|h\|\cdot\|x\|_{H_1}$$

$$\Longrightarrow \|S\| \le \|h\|$$

$$|h(x,y)| = |(Sx,y)_{H_2}| \leq \|Sx\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2} \leq \|S\| \cdot \|x\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2}$$

$$\Rightarrow \quad \|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2}} \leq \|S\|$$

و بنابر نامساوی آخر صفحه قبل، تساوی $\|h\| = \|S\|$ به دست می‌آید.