آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه پانزده ۹۹/۸/۱۹

پایه هیلبرتی: $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه است که

$$H = \overline{\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp} = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in H : \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

مثال (سری فوریه) $C[0,\pi]$ با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$ در نظر بگیرید. متمم این فضا با این ضرب داخلی

را با $L^2[0,\pi]$ نشان می‌دهیم. قرار دهید

$$e_n(x) = \cos nx \qquad n=0,1,2,\dots$$

نشان می‌دهیم که $\overline{\mathrm{Span}\{e_n\}} = L^2[0,\pi]$.

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{\pi}{2} & m=n\neq 0 \\ \pi & m=n=0 \end{cases}$$

کافی است نشان دهیم $\overline{\mathrm{Span}\{e_n\}} \supseteq C[0,\pi]$ یا به عبارتی برای هر $f\in C[0,\pi]$ و هر $\epsilon>0$ ضرایب α_i و عدد N

وجود دارد که

$$\Big\| f - \sum_{i=0}^{N} \alpha_i e_i \Big\|_2 < \epsilon$$

تابع $\cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $C[-1,1] \ni g(t) = f(\cos^{-1} t)$

$\forall \epsilon\ \exists P$ چندجمله‌ای sth. $\|g-P\|_\infty < \epsilon \implies \|f - P(\cos x)\|_\infty < \epsilon$

$$\|f - p(\cos x)\|_2 = \left[\int_0^\pi |f(x) - p(\cos x)|^2 \, dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \left[\int_0^\pi \|f - p(\cos x)\|_\infty^2 \, dx\right]^{1/2} \leq \epsilon \pi^{1/2}$$

تنها باید نشان دهیم $p(\cos x) \in \operatorname{Span}\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ یا به طور معادل $(\cos x)^m \in \operatorname{Span}\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ که $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x \in \langle 1, \cos 2x \rangle$$

حکم: برای هر m چندجمله‌ای درجه m، P_m وجود دارد که: $\cos mx = P_m(\cos x)$

$$\cos mx \cdot \cos x = \cos x \, P_m(\cos x)$$

$$\| $$

$$\frac{\cos(m+1)x + \cos(m-1)x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(m+1)x = 2\cos x \, P_m(\cos x) - P_{m-1}(\cos x) =: P_{m+1}(\cos x)$$

نتیجه- هر تابع $f \in C[0,\pi]$ را به صورت سری زیر می‌توان نمایش داد:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx$$

$\leftarrow$ سری فوریه کسینوسی

دقت کنید این تساوی به معنای همگرایی سری به دست آمده در $L^2[0,\pi]$ است.

$$\alpha_0 = \frac{\langle f, e_0 \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx, \qquad \alpha_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx \, dx$$

مثال - $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد در $L^2[0,\pi]$ است.

به طور مشابه تابع پیوسته $f \in C[0,\pi]$ را در نظر بگیرید، مشابه مثال قبل $f \in \overline{\operatorname{Span}\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}}$ و ضرایب a_n و عدد N وجود دارد

که

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nx \right\|_2 < \epsilon$$

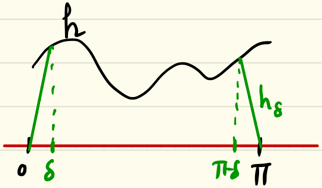
$$\left\| f(x)\sin x - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n \sin x \cos nx}_{\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{2}\left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)} \right\|_2^2 = \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum a_n \cos nx \right|^2 |\sin x|^2 \, dx$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum a_n \cos nx \right|^2 dx < \epsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x)\sin x \in \overline{\operatorname{Span}\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}}$$

اگر $g(x) = f(x)\sin x$ یا به عبارتی $f(x) = \dfrac{g(x)}{\sin x}$

اگر g پیوسته باشد و $g(0)=g(\pi)=0$ و $g'(0)$ و $g'(\pi)$ وجود داشته باشند، آنگاه f یک تابع



پیوسته است و بنا بر مطلب بالا $g \in \overline{\mathrm{Span}\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}}$. حال اگر $h \in C[0,\pi]$ دلخواه باشد

$$h_\delta(x) = h(x) \qquad \delta < x < \pi - \delta$$

h_δ در بازه‌ی $[0,\delta]$ و $[\pi-\delta,\pi]$ به صورت خطی و پیوسته توسعه داده می‌شود به طوری که

$$h_\delta(0) = h_\delta(\pi) = 0$$

در نتیجه $h_\delta \in \overline{\mathrm{Span}\{\sin nx\}}$. از طرفی داریم:

$$\|h - h_\delta\|_2 = \left[\int_0^\pi |h - h_\delta|^2\, dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \left[\int_0^\delta |h(x) - h_\delta(x)|^2\, dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} |h(x) - h_\delta(x)|^2\, dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \|h\|_\infty \cdot \sqrt{2\delta}$$

در نتیجه هر تابع پیوسته را می‌توان با بسط سری $\sin nx$ در $L^2[0,\pi]$ تقریب زد.

سری فوریه سینوسی $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx$

مثال - تابع ثابت $f(x)=1$.

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nx \quad , \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 1$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = 0$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\cos nx\right)/n\,\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$$

این تساوی به معنای همگرایی در $L^2[0,\pi]$ است. مثلاً برای $x=0$ سمت راست برابر صفر می‌شود.

بنابر تساوی پارسوال :

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\Rightarrow \quad \pi = \frac{\pi}{2} \times \frac{16}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

سری فوریه در $L^2[-\pi,\pi]$. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد هیلبرتی است.

کافی است نشان دهیم هر تابع پیوسته $f\in C[-\pi,\pi]$ را با ترکیب خطی توابع بالا می‌توان تقریب زد.

$$f(x)+f(-x) \in \overline{\mathrm{Span}\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}} \quad \text{in} \quad L^2[0,\pi]$$

چون $f(x)+f(-x)$ تابع زوج است و سری کسینوسی نیز یک تابع زوج است در نتیجه تقریب بالا در بازه $[-\pi,\pi]$ معتبر است. به طور مشابه

$$f(x)-f(-x) \in \overline{\mathrm{Span}\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}} \quad \text{in} \quad L^2[0,\pi]$$

و به علت اینکه $f(x)-f(-x)$ و $\sin nx$ توابع فرد هستند، تقریب در بازه $[-\pi,\pi]$ معتبر است. در نتیجه

$$f(x)=\frac{[f(x)+f(-x)]+[f(x)-f(x)]}{2} \in \overline{\mathrm{Span}\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n=1}^{\infty}}$$

در $L^2[-\pi,\pi]$.

نتیجه - اگر تابع $f\in C[0,\pi]$ در روابط زیر صدق کند،

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad n=0,1,2,\dots$$

آنگاه $f=0$.

نکته - اگر تابع f انتگرال‌پذیر باشد و در روابط بالا صدق کند، آنگاه $f(x_0)=0$ در هر نقطه پیوستگی x_0 . (تمرین)

نکته - گزاره مشابه برای $\sin nx$ در بازه $[0,\pi]$ یا $\sin nx$ و $\cos nx$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برقرار است.

چندجمله‌ای لژاندر

می‌دانیم $\mathrm{Span}\{\, p_n(t)=t^n\}_{n=0}^{\infty}$ در $C[-1,1]$ با نرم سوپریمم چگال است.

$$\|f-p\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} |f(t)-p(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \le \sqrt{2}\,\|f-p\|_\infty$$

درنتیجه چندجمله‌ای‌ها در $L^2[-1,1]$ نیز چگال هستند. دنباله $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه شادر در $L^2[-1,1]$ است.

به روش گرام اشمیت این پایه را به یک پایه هیلبرتی تبدیل می‌کنیم.

$$e_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{e}_1 = P_1 - \langle P_1, e_0 \rangle e_0 = t - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dt = t \Rightarrow e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$$

$$\tilde{e}_2 = P_2 - \langle P_2, e_0 \rangle e_0 - \langle P_2, e_1 \rangle e_1 = t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \, dt - \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \int_{-1}^{1} t^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \, dt$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|_2} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - 1/3\right)$$

$$\|\tilde{e}_2\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \, dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

پس از محاسبات خواهیم داشت

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(t)$$

که P_n یک چندجمله‌ای درجه n است و به آن چندجمله‌ای لژاندر می‌گوییم.

ادعا: $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]$

نکته - P_n جواب معادله دیفرانسیل $(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0$ هستند و به کمک نظریه توابع ویژه (تعمیم سری فوریه)

این توابع پایه متعامد برای فضای $L^2[-1,1]$ هستند.

اثبات ادعا: قرار دهید $u(t) = t^2-1$. $u(\pm 1) = 0$. درنتیجه

$$(*) \qquad \frac{d^k}{dt^k}\left[(u(t))^n\right]\Big|_{t=\pm 1} = 0 \qquad k=0,1,\dots,n-1$$

قرار دهید $q_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[(u(t))^n\right]$ که یک چندجمله‌ای درجه n است. نشان می‌دهیم

$$q_n \perp \langle 1, t, t^2, \dots, t^{n-1} \rangle$$

$$\langle q_n, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n}(u(t))^n \, dt = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u(t))^{n-1}\Big|_{t=-1}^{1} \overset{(*)}{=} 0$$

$$\langle q_n , t^m \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n} (u(t))^n \cdot t^m \, dt$$

$$= \cancel{\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (u(t))^n \cdot t^m \right]_{t=-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (u(t))^n \cdot m t^{m-1} \, dt$$

بنابر (*) 0

$$= - \cancel{\left[\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (u(t))^n \cdot m t^{m-1} \right]_{t=-1}^{1}} + \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (u(t))^n \, m(m-1) t^{m-2} \, dt$$

بنابر (*) 0

$$= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (u(t))^n \, dt = (-1)^m m! \left. \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} (u(t))^n \right|_{t=-1}^{1}$$

$$= 0$$

جمع بندی: q_n چندجمله‌ای درجه n است که بر همه چندجمله‌ای‌های درجه حداکثر $n-1$ عمود است. بنابراین موازی P_n است.

$$\Rightarrow \quad q_n = \alpha P_n \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \| q_n \|_2$$

$$\|q_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^n}{dt^n}(u(t))^n\right]^2 dt$$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u(t))^n}}_{0} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(u(t))^n \Big|_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u(t))^n \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(u(t))^n dt$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} (u(t))^n \cdot \underbrace{\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(u(t))^n}_{(2n)!} dt$$

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt = (2n)! \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta \, d\theta$$

$$= (2n)! \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta = (2n)! \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} = (2^n n!)^2$$