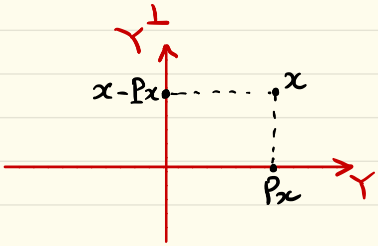
آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه چهارده ۹۹/۸/۱۷

$$M^{\perp} := \{x \in X : \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in M\}$$

$M^{\perp}$ زیرفضای بسته X است.

$$(M^{\perp})^{\perp} = \{x \in X : \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in M^{\perp}\} \supseteq M$$



اگر Y زیرفضای بسته فضای برداری هیلبرت H باشد، آنگاه تجزیه زیر برقرار است:

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

و عملگر تصویر $P: H \to Y$ تعریف می‌شود که $Nul\,P = Y^{\perp}$

گزاره ــ اگر Y زیرفضای بسته در فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $Y^{\perp\perp} = Y$.

اثبات ــ

$$\left\{\begin{array}{l} H = Y \oplus Y^{\perp} = Y^{\perp} \oplus Y^{\perp\perp} \\ Y \subseteq Y^{\perp\perp} \quad \text{به علاوه} \end{array}\right. \Rightarrow Y = Y^{\perp\perp}$$

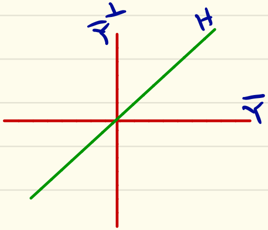
مثال - شرط بسته بودن ضروری است. اگر $Y \subsetneq H$ چگال باشد، $Y^{\perp} = \{0\} \Rightarrow Y^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$

سؤال: آیا تجزیه $H = Y \oplus Y^{\perp}$ در فضاهای ضرب داخلی غیرتام درست است؟

ایراد اثبات زیر را پیدا کنید:

فرض کنید H غیرتام باشد و در فضای هیلبرت $\bar{H}$ نشسته است. چون Y در H بسته است، پس

$$\bar{Y} \cap H = Y$$



از طرفی $\bar{H}$ هیلبرت است، بنابراین

$$\bar{Y} \oplus \bar{Y}^{\perp} = \bar{H}$$

$$\Rightarrow H = (\bar{Y} \cap H) \oplus (\bar{Y}^{\perp} \cap H) = Y \oplus Y^{\perp}$$

این تساوی درست نیست.

تجزیه $H = Y \oplus Y^{\perp}$ معادل این است که عملگر تصویر $P: H \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد، به طوری که Px نزدیکترین عضو Y به x باشد. لذا می‌توان این سؤال را پرسید که آیا وجود عملگر تصویر در یک فضای غیرتام ضروری است؟

مثال نقض را در تمرین ۱۳ سری سوم ببینید.

نتیجه - اگر $M \neq \emptyset$ زیرمجموعه فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $M^{\perp} = \{0\}$ اگر و تنها اگر $H = \overline{\text{Span}\, M}$

$$M^{\perp} = (\text{Span}\, M)^{\perp} = (\underbrace{\overline{\text{Span}\, M}}_{\text{زیرفضای بسته}})^{\perp} \Rightarrow (M^{\perp})^{\perp} = (\overline{\text{Span}\, M})^{\perp\perp} = \overline{\text{Span}\, M}$$

اگر $M^{\perp} = \{0\}$ آنگاه $\overline{\text{Span}\, M} = \{0\}^{\perp} = H$.

برعکس اگر $\overline{\text{Span}\, M} = H$، آنگاه $M^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

نکته - اگر M یک مجموعه مستقل خطی باشد، آنگاه یک پایه شاودر برای H است اگر و تنها اگر $M^{\perp} = \{0\}$.

تعریف - اگر X فضای ضرب داخلی باشد. $A \subseteq X$ را متعامد گوییم هرگاه برای هر $u,v \in A$ داشته باشیم:

$$\langle u,v\rangle = 0 \qquad \text{if} \quad u \neq v$$

به علاوه A را متعامد یکه گوییم، هرگاه متعامد بوده و طول اعضای آن برابر یک باشد. یعنی

$$\langle u,v\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad u = v \\ 0 & \text{if} \quad u \neq v \end{cases}$$

گزاره - هر مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر، مستقل خطی است.

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \quad \Rightarrow 0 = \langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n , u_i \rangle$$

$$= \alpha_1 \langle u_1, u_i\rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_i\rangle$$

$$= \alpha_i \langle u_i, u_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0$$

مثال - $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{n-ام}}{1}, 0, \dots)$ ، $M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell^2$ یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال - $X = C[0, 1]$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$. آنگاه مجموعه توابع $\{e^{2\pi int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

$$\langle e^{2\pi int}, e^{2\pi imt} \rangle = \int_0^1 e^{2\pi int} \cdot e^{-2\pi imt}\, dt$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

مثال - اگر $C[0, 1]$ را در میدان حقیقی در نظر بگیریم، آنگاه $\{\sqrt{2}\sin(2\pi nt)\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه است.

$$\int_0^1 \sin(2\pi nt)\sin(2\pi mt)\, dt = \int_0^1 \frac{\cos 2\pi(n-m)t - \cos 2\pi(n+m)t}{2}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

مثال- همچنین $\{\sqrt{2}\cos(2\pi n t)\}_{n=1}^{\infty}$ متعامدیکه است.

نکته- قضیه فیثاغورس: اگر $\langle u,v\rangle=0$ آنگاه $\|u\pm v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

همچنین اگر $\{x_1,\dots,x_n\}$ متعامد باشد، آنگاه

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$$

نکته- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ یک دنباله متعامدیکه در نظر بگیرید و $x\in \operatorname{Span}\{e_1,\dots,e_k\}$

$$\Rightarrow \quad x=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_k e_k \Rightarrow \langle x,e_i\rangle=\alpha_i$$

$$\Rightarrow \quad x=\sum_{i=1}^{k}\langle x,e_i\rangle e_i$$

به علاوه اگر $x\in \operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$، رابطه بالا کماکان درست است و

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$$

دقت کنید در این مجموع تنها تعداد متناهی جمله ناصفر است. وقتی $x\in \operatorname{Span} M$ آنگاه x یک ترکیب خطی تعداد متناهی عضو M است.

سؤال: اگر $x \in \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$ ، آیا تساوی $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ برقرار است؟

معنی تساوی بالا:

$$\lim_{n\to\infty} \| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \| = 0$$

قرار دهید $y_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

$$\Rightarrow \langle y_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle \quad 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow \langle y_n - x, e_i \rangle = 0 \quad 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow y_n - x \perp \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

$\Rightarrow \langle y_n - x, y_n \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \|y_n - x\|^2$ فیثاغورس

در نتیجه $y_n \to x$ اگر و تنها اگر $\|y_n\| \to \|x\|$

دوباره از فیثاغورس نتیجه می‌شود: $\|y_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$

از رابطه $\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \|y_n - x\|^2$ نتیجه می‌شود:

$$\|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$ برای هر n

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

نامساوی بسل: اگر X فضای ضرب داخلی باشد و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه آنگاه برای هر x نامساوی بالا برقرار است.

برای پاسخ به سؤال صفحه قبل باید بررسی کنیم تحت چه شرایطی نامساوی بسل به تساوی تبدیل می‌شود.

لم - اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H متعامد یکه باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ همگرا باشد.

اثبات - $y_n := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. همگرایی سری بالا یعنی دنباله $\{y_n\}$ در H همگرا باشد.

اگر $y_n \to y$ در H، آنگاه $\|y_n\| \longrightarrow \|y\|$

$$\|y_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|y\|^2 < \infty$$

بنابراین سری عددی $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ همگراست.

برعکس فرض کنید سری عددی $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ همگرا باشد، نشان می‌دهیم دنباله $\{y_n\}$ کوشی است.

$$n > m \qquad y_n - y_m = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i \Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

از همگرایی سری عددی نتیجه می‌شود اگر m به اندازه کافی بزرگ باشد، $\sum_{i=m+1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ به اندازه دلخواه کوچک است و برای m, n به اندازه کافی بزرگ $\|y_n - y_m\|$ به اندازه دلخواه کوچک می‌شود.

نتیجه - اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد و $x \in \overline{Span\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$ آنگاه

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

اثبات - بنابر لم صفحه قبل، سمت راست تساوی در H همگراست زیرا که $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ بنابر نابرابری بسل.

قرار می‌دهیم $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to\infty} y_n = y$

$$\langle y, e_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, e_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$$

$$\Rightarrow \langle y - x, e_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow y - x \perp \overline{Span\{e_i\}_{i=1}^{\infty}}$$

از طرفی چون $y_n \in Span\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ بنابراین $y \in \overline{Span\{e_i\}_{i=1}^{\infty}}$. با توجه به فرض داریم $y - x \in \overline{Span\{e_i\}}$

$$\Rightarrow y - x \perp y - x \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x.$$

تمرین ـ با یک مثال نقض نشان دهید، شرط تام بودن فضای H در حکم صفحه قبل ضروری است. کافی است با مثالی نشان دهید نامساوی بسل می‌تواند اکید باشد.

نکته ـ اگر $H=\overline{\operatorname{Span}\{e_n\}}$ یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه برای هر $x\in H$ داریم

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n \quad , \quad \|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2 \quad \text{(تساوی پارسوال)}$$

تعریف ـ اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه باشد که $H=\overline{\operatorname{Span}\{e_n\}}$ آن را یک پایه هیلبرتی گوییم.

اگر فضای هیلبرت H پایه هیلبرتی داشته باشد، در این صورت جدایی‌پذیر است. (قبلاً برای هر پایه شمارا دیده بودیم)

برعکس اگر H فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشد، آنگاه پایه هیلبرتی دارد. (وجود پایه بدیهی است و سپس به روش گرام ـ اشمیت این پایه را متعامد یکه می‌کنیم)

گزاره - اگر H جدایی‌پذیر باشد، هر مجموعه متعامد یکه شمارا است. (تمرین)

قضیه. اگر H فضای هیلبرت باشد و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامد یکه. آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(1) $\{0\} = \left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp}$

(2) $H = \overline{\text{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$

(3) برای هر $x \in H$ داریم $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$

(4) برای هر $x \in H$ داریم $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[d, shift right, "\text{ابتدای فصل}"'] \\ & (2) \arrow[u, shift right, "\text{اثبات شد}"'] \arrow[dl, "\text{اثبات کردیم}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{اثبات کردیم}"] & \\ (3) & & (4) \end{tikzcd}$$

$(4) \xRightarrow{\text{بدیهی}} (2)$

$(3) \xRightarrow{\text{بدیهی}} (1)$