آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه سیزده ۹۹/۸/۱۲

ادامه اثبات رابطه متوازی الاضلاع

$$(*) \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

از خاصیت (۱) که قبلاً اثبات شد، نتیجه می‌شود

$$(1) \quad \langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle 2x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle = 2 \langle x, y \rangle$$

بنابراین به ازای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle$$

$$(1) \Rightarrow \langle x - x, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle -x, y \rangle \quad \Longrightarrow \langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$$

$$\langle x - x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = \frac{\|y\|^2 - \|-y\|^2}{4} = 0$$

تعریف ضرب داخلی

در نتیجه $(*)$ برای هر $\alpha \in \mathbb{Z}$ برقرار است.

اگر $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ باشد، آنگاه بنابر (۱) داریم:

$$\langle \underbrace{\alpha x + \alpha x + \cdots + \alpha x}_{n \text{ مرتبه}}, y \rangle = n \langle \alpha x, y \rangle$$

$$\| $$

$$\langle mx, y \rangle = m \langle x, y \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle \alpha x, y \rangle = \frac{m}{n} \langle x, y \rangle$$

و رابطهٔ $(*)$ برای هر $\alpha \in \mathbb{Q}$ درست است.

بنابر پیوستگی نرم می‌دانیم اگر $\|x_i - x\| \to 0$، آنگاه $\langle x_i, y \rangle \to \langle x, y \rangle$.

اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد و $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ به گونه‌ای انتخاب شوند که $\alpha_i \to \alpha$، آنگاه $\alpha_i x \to \alpha x$

و در نتیجه

$$\langle \alpha x, y \rangle = \lim_{i \to \infty} \langle \alpha_i x, y \rangle = \lim_{i \to \infty} \alpha_i \langle x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

نکته- اگر میدان فضای برداری $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه در یک فضای ضرب داخلی داریم:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm \langle x,y\rangle \pm \langle y,x\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

$$\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle$$

$$\langle x,iy\rangle = -i\langle x,y\rangle \Rightarrow \mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,y\rangle$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}$$

تمرین- در یک فضای برداری مختلط نشان دهید اگر رابطه متوازی الاضلاع برقرار باشد، عبارت بالا یک ضرب داخلی است.

عملگر تصویر

قضیه - اگر H فضای هیلبرت باشد و M زیرمجموعه بسته و محدب آن، آنگاه برای هر $x\in H$ بردار یکتای $y\in M$ وجود دارد که

$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,M) = \inf_{z\in M} \|x-z\|$$

نکته - در یک فضای متریک دلخواه اگر M فشرده باشد، حتماً نقطه $y\in M$ وجود دارد که

$$d(x,y) = \inf_{z\in M} d(x,z) = \operatorname{dist}(x,M)$$

زیرا اگر $y_n\in M$ به گونه‌ای انتخاب شود که

$$d(x,y_n) \to \operatorname{dist}(x,M)$$

بنابر فشردگی $y_{n_i}\to y$ به ازای یک زیردنباله از $\{y_n\}$ و در نتیجه

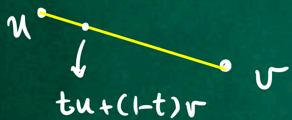
$$d(x,y) = \operatorname{dist}(x,M)$$

نکته- اگر X فضای برداری با بعد متناهی باشد و M زیرمجموعه بسته آن، آنگاه وجود بردار y در قضیه قبل برقرار است.

زیرا اگر $d = dist(x,M)$، آنگاه $M \cap \overline{B_{2d}(x)}$ فشرده است و بنابر نکته قبل مینیمم فاصله در یک نقطه‌ای به دست می‌آید.

تعریف- مجموعه M را محدب گوییم هرگاه برای هر $u,v \in M$ و $t \in [0,1]$ داشته باشیم

$$tu+(1-t)v \in M$$



اثبات- اگر $y_n \in M$ دارای این ویژگی باشند که

$$\|x-y_n\| \to dist(x,M)$$

نشان می‌دهیم $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی است. در نتیجه باید $y_n \to y$ و چون M بسته است $y \in M$ و

$$\|x-y\| = dist(x,M)$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(x-y_n) - (x-y_m)\|^2$$

رابطه متوازی الاضلاع

$$= 2\left[\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right] - \|(x-y_n) + (x-y_m)\|^2$$

$$= 2\left[\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right] - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\left[\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right] - 4\left(\operatorname{dist}(x,M)\right)^2$$

در این رابطه اگر از شرط تحدب M و اینکه $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$ استفاده کرده و نتیجه گرفته ایم که

$$\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq \operatorname{dist}(x,M)$$

در نتیجه اگر m و n به اندازه کافی بزرگ باشند، مقدار $\|y_n - y_m\|$ به اندازه دلخواه می‌تواند کوچک باشد.

اثبات یکتایی

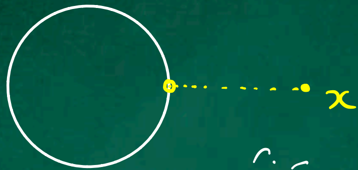
اگر $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = \operatorname{dist}(x,M)$ آنگاه بنابر قبل

$$\|y_1-y_2\|^2 = 2\left(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2\right) - 4\left\|x-\frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\left(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2\right) - 4\left(\operatorname{dist}(x,M)\right)^2$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_2 .$$



مثال ـ شرط بسته بودن ضروری است.

مثلاً از گوی بسته یک نقطه روی مرز را حذف کنیم،

مجموعه محدب غیربسته است و شبیه شکل برای نقطه x مینیمم فاصله به دست نمی‌آید.

مثال ـ شرط محدب ضروری است. $\ell^2 \supseteq M = \{(1+\frac{1}{n})e_n\}_{n\geq 1}$

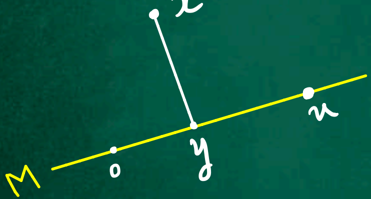
فاصله هر دو عضو M حداقل 2 است. بنابراین M بسته است.

به ازای $x=0$ ، $\mathrm{dist}(x, M) = 1$ و این فاصله در هیچ نقطه‌ای از M به دست نمی‌آید.

مثال ـ شرط ضرب داخلی ضروری است. (تمرین ۱۲ سری سوم)

لم- در قضیه قبل اگر M زیرفضای بسته باشد، آنگاه $z=x-y$ بر M عمود است. یعنی برای هر $u\in M$ داریم:

$$\langle x-y,\, u\rangle = 0$$



اثبات- $\quad (2)\quad \|x-y\| \le \|x-v\| \qquad v\in M$

$$\varphi(t) = \|x-(y+tu)\|^2 = \|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-y,u\rangle + t^2\|u\|^2$$

بنابر (2) تابع $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مینیمم خود را در نقطه $t=0$ بدست می‌آورد. در نتیجه (از اینکه M زیرفضاست $y+tu\in M$، برای هر t استفاده کردیم)

$$0=\varphi'(0) = 2\,\mathrm{Re}\langle x-y,u\rangle$$

اگر میدان فضای برداری حقیقی باشد، اثبات کامل است. در حالتی که میدان $\mathbb{C}$ است، قرار دهید

$$\psi(t) := \varphi(it) = \|x-(y+itu)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \psi'(0) = 2\,\mathrm{Im}\langle x-y, u\rangle$$

و در نتیجه

$$\langle x-y, u\rangle = 0$$

تعریف- اگر Y یک زیرمجموعه فضای ضرب داخلی H باشد، $Y^{\perp}$ را متعامد Y به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y^{\perp} = \{ z \in H : z \perp Y \} = \{ z \in H : \langle z, y\rangle = 0 \ \forall y \in Y \}$$

اگر X و Y دو زیرفضای H باشند، $Z = X \oplus Y$ را جمع مستقیم این دو زیرفضا گوییم، هرگاه

$$\forall z \in Z \quad \exists!\, x \in X,\ y \in Y \quad \text{sth.} \quad z = x + y$$

دقت کنید $X + Y = \{ x + y : x \in X, y \in Y \}$ همیشه زیرفضا است. تعریف جمع مستقیم بیان می‌کند که اعضای این زیرفضا تجزیه منحصر به فرد به صورت $x + y$ دارند.

قضیه. اگر Y زیرفضای بسته در فضای هیلبرت H باشد آنگاه

$$Y^{\perp} \oplus Y = H$$

اثبات. اگر $x \in H$ دلخواه باشد، بنا بر لم قبل $y \in Y$ وجود دارد که $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ و

$$x-y \perp Y \Rightarrow x-y \in Y^{\perp}.$$

در نتیجه

$$x = y + (x-y) \in Y + Y^{\perp}$$

<u>یکتایی نمایش</u>: فرض کنید

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \in Y + Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in Y \cap Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow z_2 - z_1 \perp Y \Rightarrow 0 = \langle z_2 - z_1, y_1 - y_2 \rangle = \langle z_2 - z_1, z_2 - z_1 \rangle$$

نکته- شرط بسته بودن زیرفضا در قضیه قبل ضروری است.

از تعریف $Y^\perp$ نتیجه می‌شود که $(\overline{Y})^\perp = Y^\perp$. در نتیجه اگر Y یک زیرفضای چگال H باشد، آنگاه

$$Y^\perp = H^\perp = \{0\} \Rightarrow Y + Y^\perp = Y \neq H$$

مثلاً اگر $Y \subseteq l^2$ زیرفضای دنباله‌ها از یکی به بعد صفر باشد، که در l^2 چگال است.

تعریف- اگر H فضای هیلبرت و Y زیرفضای بسته آن باشد، عملگر $P: H \to Y$ را عملگر تصویر گوییم، هرگاه

$$\| x - Px \|_H = dist(x, Y) = \inf_{y \in Y} \| x - y \|_H$$

در واقع P یک عملگر خطی پیوسته است. زیرا

$$P(\alpha x) = \alpha P(x)$$

می‌دانیم $x - P(x) \in Y^\perp \Leftarrow \alpha x - \alpha P(x) \in Y^\perp$

از طرف دیگر $\alpha x - P(\alpha x) \in Y^{\perp}$. در نتیجه

$$\alpha Px - P(\alpha x) = \big(\alpha x - P(\alpha x)\big) - \alpha\big(x - P(x)\big) \in Y^{\perp}$$

و چون $Px, P(\alpha x) \in Y$ باید

$$\alpha Px - P(\alpha x) \in Y \cap Y^{\perp}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha Px = P(\alpha x)$$

$$P(x+z) = P(x) + P(z)$$

$$x - Px \in Y^{\perp}, \quad z - Pz \in Y^{\perp}, \quad (x+z) - P(x+z) \in Y^{\perp}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{P(x+z) - P(x) - P(z)}_{\in Y} \in Y^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad P(x+z) - P(x) - P(z) = 0$$

پیوستگی P

$$x = Px + (x - Px) \in Y \oplus Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow \quad \langle Px , x - Px \rangle = 0 \quad , \quad \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$$

$$\geq \|Px\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|Px\| \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|P\| \leq 1$$

نکته- بنا بر تعریفِ عملگر تصویر P ، برای هر $y \in Y$ می‌دانیم $Py = y$. درنتیجه اگر $Y \neq \{0\}$ آنگاه

$$\|P\| = 1$$

خواص عملگر تصویر:

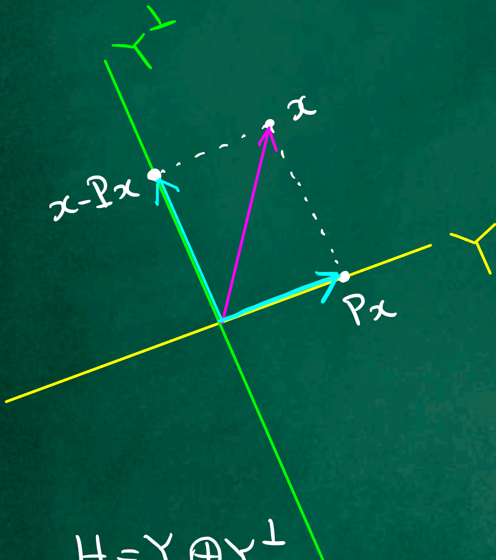
عملگر خطی کران‌دار $P : H \longrightarrow Y$

(1) پوشا است.

(2) $$P\big|_Y = id$$

(3) $$\text{Null}\, P = Y^{\perp}$$

(4) $$P^2 = P$$



$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$