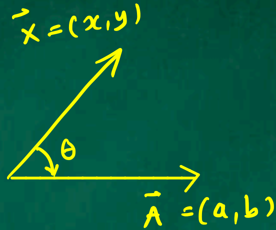
آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه دوازده ۹۹/۸/۱۰

فضای ضرب داخلی



$$\vec{A}\cdot\vec{x} = ax+by = |\vec{A}|\,.\,|\vec{x}|\cos\theta$$

اگر X فضای برداری دلخواه باشه، تابع $\langle .\,,. \rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ضرب داخلی گوییم، هرگاه

1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

2) $\langle \alpha x, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle \qquad \forall \alpha\in\mathbb{C}$

3) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

4) $\langle x,x\rangle \geq 0$

5) $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

اگر $\langle \cdot , \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای X باشد، نرم القایی از این ضرب داخلی به صورت

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

چرا تعریف بالا منجر به یک نرم روی X می‌شود؟

(1) بنا بر خاصیت (5) ضرب داخلی داریم:

$$x=0 \iff \|x\|=0$$

(2)

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle} \underset{(2)}{=} \sqrt{\alpha \langle x,\alpha x\rangle}$$

$$\underset{(3)}{=} \sqrt{\alpha\, \overline{\langle \alpha x, x\rangle}} \underset{(2)}{=} \sqrt{\alpha \bar{\alpha}\, \overline{\langle x,x\rangle}}$$

$$\underset{(4)}{=} \sqrt{|\alpha|^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(3) نامساوی مثلث :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

باید نشان دهیم

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$$

که معادل است با :

$$\langle x+y, x+y\rangle \leq \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\|x\|\cdot\|y\|$$

$$\|$$

$$\cancel{\langle x,x\rangle} + \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{\overline{\langle x,y\rangle}} + \cancel{\langle y,y\rangle}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}\langle x,y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

گزاره - اگر X فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه

نامساوی کوشی-شوارتز : $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

اثبات -

$$0 \le \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - \alpha\langle y,x\rangle - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\right) + |\alpha|^2\cdot\|y\|^2$$

برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ عبارت بالا یک چندجمله‌ای درجه ۲ برحسب α است که همیشه مثبت است. بنابراین باید

$$\left(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\right)^2 - \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \left|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\right| \le \|x\|\cdot\|y\| \qquad (*)$$

اگر $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|\, e^{i\theta}$ $\Leftarrow$ $\langle e^{-i\theta}x, y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ یک عدد حقیقی است.

در $(*)$ به جای x قرار دهید $e^{-i\theta}x$.

$$|\langle x,y\rangle| \le \|e^{-i\theta}x\|\cdot\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|$$

نکته- شرط تساوی نامساوی کوشی-شوارتز این است که $\{x,y\}$ وابسته خطی باشند.

اگر وابسته خطی باشند مثلاً $x = ry$ آنگاه اگر $0 \le r$

$$\langle x,y\rangle = r\langle y,y\rangle = r\|y\|^2 = \|x\|\cdot\|y\|$$

برعکس اگر $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|$ بنابر اثبات نامساوی کوشی-شوارتز باید

$$\|x-\alpha y\|^2 = \left(\alpha\|y\| - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|}\right)^2$$

به شرط آنکه $y \neq 0$ قرار دهید $\alpha = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ در نتیجه $\|x-\alpha y\|^2=0$ و باید

$$x = \alpha y$$

نکته - وقتی میدان $\mathbb{R}$ است، از نامساوی کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود که

$$-1 \le \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1$$

در نتیجه می‌توان زاویه بین دو بردار x و y را θ تعریف کرد به گونه‌ای که $\cos\theta$ عبارت بالا باشد.

و به رابطه زیر رسید:

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\| \cos\theta$$

به همین دلیل دو بردار x و y را متعامد گوییم هرگاه $\langle x,y\rangle = 0$ و با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ـ در فضای ضرب داخلی X ، اگر $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ (این حکم را در تمرین‌ها به روش دیگری به دست آورده‌ایم از نرم القایی از ضرب داخلی است) آنگاه

$$\langle x_n , y_n \rangle \longrightarrow \langle x , y \rangle$$

اثبات ـ

$$|\langle x_n , y_n \rangle - \langle x , y \rangle| = |\langle x_n , y_n \rangle - \langle x , y_n \rangle + \langle x , y_n \rangle - \langle x , y \rangle|$$

$$\leq |\langle x_n - x , y_n \rangle| + |\langle x , y_n - y \rangle|$$

$$\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \longrightarrow 0$$

طبق کوشی شوارتز

تعریف ـ اگر X فضای ضرب داخلی باشد که نرم القایی آن تام باشد، آنگاه X را فضای هیلبرت گوییم.

مثال- $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر هیلبرت هستند.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$$

به راحتی می‌توان دید که خواص ضرب داخلی برقرار است.

مثال- فضای ℓ^2 با طرز زیر یک ضرب داخلی است:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \quad , \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\bar{y}_i$$

بنابر نامساوی کوشی-شوارتز (هولدر) در فضای ℓ^2 داریم:

$$\left| \sum_i x_i\bar{y}_i \right| \leq \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_i |y_i|^2\right)^{1/2}$$

که نشان می‌دهد عبارت $\sum x_i\bar{y}_i$ همگرا است. نرم القائی از این ضرب داخلی همان نرم $\|\cdot\|_2$ است که قبلاً تعریف کردیم.

سؤال ـ آیا ℓ^p فضای ضرب داخلی است؟ یعنی آیا می‌توان ضرب داخلی روی آن تعریف کرد که نرم القائی حاصل نرم $\|\cdot\|_p$ باشد؟

مثال ـ روی فضای $C[a,b]$، ضرب داخلی زیر را تعریف کنید (میدان $\mathbb{R}$)

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

که نرم القائی از آن به صورت

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

است. این نرم با نرم سوپریمم هم ارز نیست. (تمرین: ثابت کنید ثابت $C>0$ وجود ندارد که

$(\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$

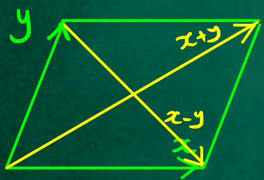
به علاوه $C[a,b]$ با نرم القائی از این ضرب داخلی تام نیست. (تمرین)

متمم $C[a,b]$ نسبت به این نرم را با $L^2[a,b]$ نشان می‌دهیم که یک فضای هیلبرت است.

سؤال - آیا ضرب داخلی روی $C[a,b]$ وجود دارد که نرم القایی آن نرم سوپریمم باشد؟

سؤال - آیا هر نرمی روی فضای برداری می‌تواند از یک ضرب داخلی بیاید؟

پاسخ - خیر. هر نرم القایی از ضرب داخلی خاصیت زیر را باید داشته باشد.



رابطه متوازی الاضلاع:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

مثال- در فضای ℓ^p قرار دهید $x=e_1$ و $y=e_2$ بنابراین

$$\|e_1+e_2\|_p^2 = 2^{2/p}$$

$$\|e_1-e_2\|_p^2 = 2^{2/p} \Longrightarrow 2^{2/p}+2^{2/p} \neq 2(1+1)$$

اگر $p\neq 2$

مثال ـ در $C[0,1]$ قرار دهید $f(t)\equiv 1$ و $g(t)=t$

$$\|g\|_\infty=1\ ,\ \|f\|_\infty=1\ ,\ \|f-g\|_\infty=1\ ,\ \|f+g\|_\infty=2$$

رابطهٔ متوازی الاضلاع به صورت زیر باید باشد که برقرار نیست

$$2^2+1\neq 2(1+1)$$

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای اینکه یک نرم از ضرب داخلی به دست آمده باشد، برقراری رابطهٔ متوازی الاضلاع است.

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\qquad \forall x,y$$

اثبات ـ فرض کنید میدان فضای برداری اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$\langle x,y\rangle := \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}$$

نشان می‌دهیم تعریف بالا یک ضرب داخلی روی فضای برداری است. به وضوح نرم القایی از این ضرب داخلی همان نرم فضای برداری است، $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$.

$$(1)\quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

$$\frac{\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2}{4} = \frac{\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2}{4} + \frac{\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2}{4}$$

می‌دانیم برای هر u,v

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

$$u = x+z,\quad v = y \Rightarrow \|x+y+z\|^2 + \|x+z-y\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$u = x,\quad v = y-z \Rightarrow \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y-z\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = 2\left[\|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y-z\|^2\right]$$

از طرفی بنابر رابطه متوازی الاضلاع داریم:

$$\|x+z\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|z\|^2\right) - \|x-z\|^2$$

$$\|y-z\|^2 = 2\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right) - \|y+z\|^2$$

(3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$

$$\frac{\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

(4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

$$\langle x, x \rangle = \frac{\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2}{4} = \|x\|^2$$

(5) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$

از خاصیت (4) می‌دانیم $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ و با توجه به خواص نرم این خاصیت برقرار است.

(2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x - y\|^2}{4} = \alpha \, \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$