آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه یازده 99/8/5

دوگان فضای $C[a,b]$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)\, dt$$

اگر f انتگرال‌پذیر باشد، رابطه بالا یک تابعک خطی پیوسته روی $C[a,b]$ است.

$$\|f\|_{(C[a,b])'} = \sup_{\varphi} \frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_\infty} \leq \sup \frac{\int_a^b |f(t)| \cdot |\varphi(t)|\, dt}{\|\varphi\|_\infty}$$

$$\leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

اگر فضای $C[a,b]$ را به عنوان زیرفضای توابع کران‌دار، $B[a,b]$، در نظر بگیریم، بنابر قضیه هان-باناخ

تابعک f را می‌توان به $\tilde{f}$ روی $B[a,b]$ توسعه داد به طوری که $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. حال قرار دهید

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{|f(t)|} & f(t) \neq 0 \\ 0 & f(t) = 0 \end{cases} , \quad \langle \tilde{f}, \psi \rangle = \int_a^b |\tilde{f}(t)|\, dt$$

سؤال: چرا تساوی روبرو درست است؟

$$\varphi_n \to \psi$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = \langle f, \psi \rangle$$

سؤال: آیا در دوگان $C[a,b]$ تابعک‌های خطی پیوسته دیگری به غیر از آنچه در صفحه قبل تعریف شد، وجود دارد؟

تعریف: تابع w که روی بازه $[a,b]$ تعریف شده است، با تغییرات کران‌دار نامیده می‌شود هرگاه برای هر افراز

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \}$$

تغییرات w نسبت به این افراز

$$Var_P(w) = \sum_{i=1}^{n} |w(t_i) - w(t_{i-1})|$$

کران‌دار باشد. تغییرات کامل w را با ضابطه

$$TV(w) = \sup_P Var_P(w)$$

تعریف می‌کنیم. مجموعه همه توابع با تغییرات کران‌دار را با $BV[a,b]$ نشان می‌دهیم که یک فضای نرم‌دار است با نرم

$$\|\omega\|_{BV} := |\omega(a)| + TV(\omega)$$

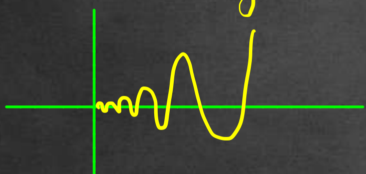
مثال - توابع مشتق‌پذیر با مشتق کران‌دار با تغییرات کران‌دار هستند.

$$Var_{\mathcal{P}}(\omega) = \sum_i |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})| = \sum_i |\omega'(t_i^*)| \cdot |t_i - t_{i-1}|$$

$$\leq \|\omega'\|_\infty \cdot \sum_i (t_i - t_{i-1}) = (b-a) \cdot \|\omega'\|_\infty$$

مثال - توابع یکنوا با تغییرات کران‌دار هستند. اگر ω صعودی باشد

$$Var_{\mathcal{P}}(\omega) = \sum_i |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})| = \sum_i \omega(t_i) - \omega(t_{i-1}) = \omega(b) - \omega(a)$$



مثال - $\omega(t) = t \sin \frac{1}{t}$ با تغییرات کران‌دار نیست.

$$t_n = \left(n\pi + \pi/2\right)^{-1}$$

$$\mathcal{P}_N = \left\{ 0 < t_N < t_{N-1} < \cdots < t_0 = \frac{2}{\pi} \right\}$$

$$\mathrm{Var}_{P_{N+1}} = \mathrm{Var}_{P_N} - |\omega(t_N) - \omega(0)| + |\omega(t_{N+1}) - \omega(t_N)| + |\omega(t_{N+1}) - \omega(0)|$$

$$= \mathrm{Var}_{P_N} - t_N + (t_N + t_{N+1}) + t_{N+1} = \mathrm{Var}_{P_N} + \frac{2}{(N+1)\pi + \pi/2}$$

$$\mathrm{Var}_{P_N} \sim \sum_N \frac{2}{N\pi + \pi/2} = \infty$$

تعریف- اگر تابع $\varphi \in C[a,b]$ باشد و $\omega \in BV[a,b]$ ، انتگرال ریمان- اشتیلتس φ نسبت به ω به صورت زیر تعریف می‌شود. برای افراز $P = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ مجموع ریمان

$$S(P) = \sum_i \varphi(t_i)\left(\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)\right)$$

اگر عدد I وجود داشته باشد که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر افرازی که ضخامت آن کمتر از δ باشد، $|S(p) - I| < \varepsilon$. آنگاه انتگرال ریمان- اشتیلتس φ نسبت به ω برابر I است.

و آن را با نماد

$$\int_a^b \varphi(t)\, d\omega(t)$$

نشان می‌دهیم. وقتی $\omega(t)=t$ دقیقاً همان انتگرال ریمان است. به علاوه اگر ω یک تابع مشتق‌پذیر باشد، داریم

$$\int_a^b \varphi(t)\, d\omega(t) = \int_a^b \varphi(t)\, \omega'(t)\, dt$$

که عبارت سمت راست همان انتگرال ریمان است.

هر انتگرال ریمان - اشتیلس یک تابعک خطی پیوسته روی $C[a,b]$ تعریف می‌کند.

$$\varphi \longmapsto \int_a^b \varphi(t)\, d\omega(t)$$

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\, d\omega(t) \right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot TV(\omega)$$

تمرین - این نامساوی را اثبات کنید.

قضیه: هر تابعک خطی پیوسته f روی $C[a,b]$ بصورت یک انتگرال ریمان - اشتیلس

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_a^b \varphi(t)\,d\omega(t)$$

نمایش داده می‌شود که $\omega\in BV[a,b]$ و

$$\|f\|_{(C[a,b])'}=\|\omega\|_{BV}$$

نکته - اگر g یک تابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد، تابعک خطی پیوسته

$$\varphi\mapsto\int_a^b \varphi(t)g(t)\,dt$$

نیز نمایشی بصورت انتگرال ریمان - اشتیلس دارد که

$$\omega(t)=\int_a^t g(s)\,ds$$

(تمرین - نشان دهید $\omega\in BV$.)

اثبات- بنابر هان-باناخ f را به تابع کران دار توسیع می دهیم. فرض کنید $\tilde{f}$ توسیع f به $B[a,b]$ باشد که

$$\|f\| = \|\tilde{f}\|$$

تابع مشخصه بازه $[a,t]$ را با χ_t نشان می دهیم. در واقع

$$\chi_t(s) = \begin{cases} 1 & a \le s \le t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

و تابع ω را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\omega(a) = 0, \quad \omega(t) = \langle \tilde{f}, \chi_t \rangle \quad \forall\ a < t \le b$$

حال ادعا می کنیم که ω یک تابع با تغییرات کران دار است. اگر $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ یک افراز دلخواه باشد

$$Var_P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})| = |\langle \tilde{f}, \chi_{t_1} \rangle| + \sum_{i=2}^{n} |\langle \tilde{f}, \chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}} \rangle|$$

$$= \varepsilon_1 \langle \tilde{f}, x_{t_1} \rangle + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \langle \tilde{f}, x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \rangle$$

که $\varepsilon_1 = \begin{cases} \dfrac{\langle \tilde{f}, x_{t_1} \rangle}{|\langle \tilde{f}, x_{t_1} \rangle|} & \langle \tilde{f}, x_{t_1} \rangle \neq 0 \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases}$ به طور مشابه ε_i علامت $\langle \tilde{f}, x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \rangle$ را نشان دهد.

$$\mathrm{Var}_{\beta}(\omega) = \langle \tilde{f}, \varepsilon_1 x_{t_1} + \sum_{i=2} \varepsilon_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \rangle$$

$$\leq \| \tilde{f} \| \cdot \underbrace{\| \varepsilon_1 x_{t_1} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \|_\infty}_{} \leq \| \tilde{f} \|$$

اگر این تابع را در نقطه s نگاه کنیم، اگر s در بازه $(0,t_1]$ باشد، آنگاه $x_{t_i}(s)=1$ برای هر i و در نتیجه تابع بالا برابر ε_1 است. اگر $s \in (t_{i-1}, t_i]$ باشد، $x_{t_j}(s)=1$ برای $i-1<j$ و $x_{t_j}(s)=0$ برای $j \leq i-1$ و در نتیجه مقدار تابع برابر ε_i است.

به علاوه بر اساس نتیجه می‌گیریم که

$$\|\omega\|_{BV} \le \|\tilde{f}\| \qquad (*)$$

حال نشان می‌دهیم نمایش انتگرالی مورد نظر برقرار است. φ را یک تابع پیوسته می‌گیریم و برای افراز دلخواه

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

تعریف کنید

$$\psi_{\mathcal{P}} = \varphi(t_0)\chi_{t_1} + \sum_{i=2}^{n} \varphi(t_{i-1})[\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}}]$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{f}, \psi_{\mathcal{P}} \rangle = \varphi(t_0)\langle \tilde{f}, \chi_{t_1} \rangle + \sum_{i=2}^{n} \varphi(t_{i-1})\left(\langle \tilde{f}, \chi_{t_i} \rangle - \langle \tilde{f}, \chi_{t_{i-1}} \rangle\right)$$

$$= \varphi(t_0)\,\omega(t_1) + \sum_{i=2}^{n} \varphi(t_{i-1})\left(\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_{i-1})\left(\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})\right) = \int_a^b \psi_P(t)\, d\omega(t)$$

از طرفی دنباله ضرایب ثابت به صورت تبدیل کند، سمت راست به انتگرال ریمان-استیلتس φ همگرا می‌شود،

و سمت چپ به $\langle \tilde{f}, \varphi \rangle$. زیرا $\|\Psi_p - \varphi\|_\infty \longrightarrow 0$

$s \in (t_{i-1}, t_i]$ $$\Psi_p(s) - \varphi(s) = \varphi(t_{i-1}) - \varphi(s)$$

از پیوستگی یکنواخت φ نتیجه می‌شود که مقدار بالا به صفر میل می‌کند.

بدین ترتیب نامساوی انتگرالی برقرار است.

برای تکمیل اثبات دقت کنید که $$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \left| \int_a^b \varphi(t)\, d\omega(t) \right| \leq \|\varphi\| \cdot \|\omega\|_{BV}$$

$$\Rightarrow \quad \|f\| \leq \|\omega\|_{BV}$$

بنابر $(*)$ و هان-باناخ که $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ اثبات تکمیل می‌شود.