آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه دهم ۹۹/۸/۳

قضیه هان-باناخ

تعریف- تابعک $p: X \longrightarrow \mathbb{R}$ زیرخطی گوییم، هرگاه

(1) زیرجمعی $\qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $\forall \alpha \geq 0 \qquad p(\alpha x) = \alpha p(x)$

مثال- نشان دهید $p(x) = \|x\|$ یک تابعک زیرخطی است.

همچنین $p: l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $p(x) = \limsup_{n \to \infty} x_n$ یک تابعک زیرخطی است.

قضیه- X فضای برداری حقیقی نرم دار باشد و p یک تابعک زیرخطی روی X است. به علاوه فرض کنید f یک تابعک خطی باشد که روی زیرفضای Z از X تعریف شده است و

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Z$$

آنگاه یک توسیع خطی f مانند $\tilde{f}$ به کل X وجود دارد که $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ برای هر $x \in X$.

اثبات- $M = \{ g : \underset{\underset{Z}{\cup\!\shortmid}}{D(g)} \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} \ :\ g(x) \le p(x) \quad \forall x \in D(g) \ ,\ g|_Z = f \}$

$$g_1 \le g_2 \iff D(g_1) \subseteq D(g_2) \ \text{و}\ g_2|_{D(g_1)} = g_1$$

کلاس M ناتهی و یک مجموعه جزئی مرتب است. به علاوه هر زنجیری در آن کران بالا دارد. اگر $\{g_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در M باشد.

قرار دهید: $D(g) = \bigcup_{i\in I} D(g_i)$ و $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g|_{D(g_i)} := g_i$

$D(g)$ یک زیرفضای X است زیرا خاصیت زنجیری $\{g_i\}_{i\in I}$ نشان می‌دهد که $D(g_i)$ و $D(g_j)$ برای هر i و j

قابل مقایسه هستند، یعنی $D(g_i) \subseteq D(g_j)$ یا $D(g_j) \subseteq D(g_i)$.

همچنین g یک نگاشت خطی خوش‌تعریف است. در واقع اگر $x \in D(g_i) \cap D(g_j)$ باشد، به دلیل خاصیت زنجیره

مثلاً $g_i \le g_j$ و $g_j|_{D(g_i)} = g_i$ بنابراین $g_i(x) = g_j(x)$.

به علاوه به سادگی می‌توان دید که $g \in M$ و از اعضای $\{g_i\}_{i\in I}$ بزرگتر است.

بنابر لم زرن عضو ماکسیمال برای M وجود دارد که آن را $\tilde{f}$ می‌نامیم.

$$\tilde{f}: D(\tilde{f}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}\big|_Z = f, \quad \tilde{f}(x) \leq p(x)$$

تنها باید نشان دهیم که $D(\tilde{f}) = X$. فرض کنید $0 \neq y_1 \in X - D(\tilde{f})$ و $Y = \mathrm{Span}\left(D(\tilde{f}) \cup \{y_1\}\right)$

اگر بتوانیم $\tilde{f}$ را به Y توسعه دهیم که رابطه $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ روی Y برقرار باشد، تناقض با ماکسیمال بودن $\tilde{f}$ است. اگر $c = \tilde{f}(y_1)$ باشد، مقدار c به گونه‌ای تعیین می‌شود که رابطه

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Y$$

برقرار باشد. اعضای Y را به صورت $x = y + \alpha y_1$ می‌توان نوشت:

$$\tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha y_1) \qquad \forall y \in D(\tilde{f}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

اگر $\alpha>0$،

$$c \leq \frac{1}{\alpha}\left[p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y)\right]$$

$$= p\left(\frac{y}{\alpha}+y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

کافیست

(1) $$c \leq \inf_{y\in D(\tilde{f})}\left(p(y+y_1) - \tilde{f}(y)\right)$$

اگر $\alpha<0$، آنگاه داریم

$$c \geq \frac{1}{\alpha}\left[p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y)\right]$$

$$= -\left[p\left(\frac{y}{-\alpha}-y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{-y}{\alpha}\right)\right]$$

کافیست

(2) $$c \geq \sup_{y\in D(\tilde{f})}\left(-p(y-y_1) + \tilde{f}(y)\right)$$

باید مقدار c به گونه‌ای تعیین شود که خاصیت‌های (1) و (2) همزمان برقرار باشد. برای این منظور تنها کافیست نشان دهیم

$$-p(y-y_1)+\tilde{f}(y) \leq p(z+y_1)-\tilde{f}(z) \qquad \forall y,z \in D(\tilde{f})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{f}(y+z) \leq p(y-y_1)+p(z+y_1)$$

$$\Uparrow$$

$$\tilde{f}(y+z) \leq p(y+z)$$

نتایج قضیه هان-باناخ:

① اگر Z زیرفضای فضای نرم دار X باشد و $f \in Z'$. آنگاه $\tilde{f} \in X'$ وجود دارد که

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Z'}$$

اثبات- $p(x) = \|f\|_{Z'} \cdot \|x\|_X$ یک تابعک زیرخطی روی X است و

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Z$$

بنابر قضیه هان-باناخ توسیع خطی $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\|_{Z'} \cdot \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

در رابطه بالا به جای x قرار دهید $-x$. آنگاه

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq \|f\|_{Z'} \cdot \|x\|_X$$

در نتیجه $\forall x \in X \quad |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Z'} \cdot \|x\|_X$. بنابراین $\tilde{f} \in X'$. برای محاسبه‌ی نرم

آن می‌توان نوشت:

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|_X} \leq \|f\|_{Z'}$$

$$\Rightarrow \quad \|\tilde{f}\|_{X'} \leq \|f\|_{Z'}$$

از طرفی چون $\tilde{f}$ توسیع f است پس $\|f\|_{Z'} \leq \|\tilde{f}\|_{X'}$ (چرا؟)

و در نتیجه تساوی برقرار است.

② اگر $X \neq \{0\}$ آنگاه $X' \neq \{0\}$.

درنتیجه (۱) قرار دهید $Z = \langle e \rangle$ که $e \in X$ یک بردار دلخواه است. $f \in Z'$ را با ضابطه

$$f(te) = t\|e\|_X$$

درنظر بگیرید. آنگاه $\tilde{f} \in X'$ وجود دارد که چون توسیع f است، حتماً ناصفر است.

③ اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $0 \neq e \in X$. آنگاه $\tilde{f} \in X'$ وجود دارد که

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = 1 \quad , \quad \tilde{f}(e) = \|e\|_X$$

همان اثبات نتیجه (2) است. تنها باید دقت کنیم که $\|f\|_{Z'} = 1$.

(4)

$$\|x\|_X = \sup_{0\neq f\in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{X'}}$$

$$|f(x)| \le \|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X \Rightarrow \sup_{f\in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{X'}} \le \|x\|_X$$

بنابر خاصیت (3) مقدار سوپریمم برابر $\|x\|_X$ است.

(5) اگر $e\in X$ دارای این خاصیت باشد که $f(e)=0$ برای هر $f\in X'$، آنگاه $e=0$.

قضیه‌ی هان-باناخ (صورت مختلط)

X فضای برداری حقیقی یا مختلط است و p یک تابع زیرخطیِ حقیقی که

$$p(x+y) \le p(x)+p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$$

f یک تابع خطی که روی زیرفضای Z از X تعریف شده است و

$$|f(x)| \le p(x) \qquad \forall x \in Z$$

در این صورت توسیع $\tilde{f}$ به کل فضای X وجود دارد که

$$|\tilde{f}(x)| \le p(x) \qquad \forall x \in X$$

اثبات - اگر X فضای برداری حقیقی باشد، نسخه‌ی قبلی هان-باناخ نشان می‌دهد که $\tilde{f}$ وجود دارد به طوری که

$$\tilde{f}(x) \le p(x) \qquad \forall x \in X$$

اگر به جای x قرار دهیم $-x$ و خاصیتِ $p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$ را استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \le p(-x) = p(x) \Rightarrow |\tilde{f}(x)| \le p(x)$$

حال X را یک فضای برداری مختلط بگیرید و $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ که f_1 و f_2 دو تابعک حقیقی هستند.

اگر X را به عنوان فضای برداری حقیقی در نظر بگیریم می‌توانیم f_1 و f_2 را به X توسعه دهیم. دقت کنید f_1 و f_2 نمی‌توانند مستقل باشند. زیرا

$$if_1(x)-f_2(x)=if(x)=f(ix)=f_1(ix)+if_2(ix)$$

$$\Rightarrow \quad f_1(x)=f_2(ix) \quad , \quad f_1(ix)=-f_2(x)$$

بنابر قسمت اول قضیه تابعک خطی حقیقی $\tilde{f}_1 : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\tilde{f}_1|_Z = f_1$

$$|\tilde{f}_1(x)| \leq p(x) \qquad \forall x\in X$$

(دقت کنید $|f_1(x)|\leq|f(x)|\leq p(x)$ برای هر $x\in Z$) حال قرار دهید

$$\tilde{f}_2(x) := -\tilde{f}_1(ix)$$

$$\tilde{f}(x) := \tilde{f}_1(x) - i\,\tilde{f}_1(ix)$$

واضح است که $\tilde{f}|_Z = f$. اما باید دو مطلب را نشان دهیم:

$$\tilde{f}(\alpha x) = \alpha \tilde{f}(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X \qquad (2)$$

$$\alpha = a + ib \Rightarrow \tilde{f}(\alpha x) = \tilde{f}(ax + ibx) = \tilde{f}_1(ax + ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx)$$

$$= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - ia\tilde{f}_1(ix) + ib\tilde{f}_1(x)$$

$$= (a+ib)\left(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)\right) = \alpha \tilde{f}(x)$$

اثبات (2): $\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \tilde{f}(e^{-i\theta} x) = |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}_1(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x)$$

$\tilde{f}(e^{-i\theta} x)$ یک عدد حقیقی است.