به نام او

امتحان میان ترم درس آنالیز تابعی مقدماتی وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۹/۹/۶

سؤال اول: یکی از سه گزاره زیر را اثبات کنید.

۱. ثابت کنید که فضای برداری ℓ^p برای هر $1 \leq p < \infty$ تام است.

۲. ثابت کنید که فضای برداری ℓ^∞ تام است.

۳. ثابت کنید که فضای برداری توابع پیوسته $C[a,b]$ با نرم سوپریمم یک فضای تام است.

سؤال دوم: به یکی از سه سؤال زیر پاسخ دهید.

۱. نشان دهید دنباله توابع $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد برای $L^2[0,\pi]$ است.

۲. نشان دهید دنباله توابع $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه متعامد برای $L^2[0,\pi]$ است.

سؤال سوم: برای هر عدد حقیقی $s > 0$، قرار دهید

$$W^{s,p} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \,:\, a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} n^s |a_n|^p < \infty \right\}$$

به یکی از سه سؤال زیر پاسخ دهید:

۱. برای هر $s > 0$ و $1 \leq p \leq \infty$، نشان دهید که $W^{s,p}$ زیرفضای چگال و سره ℓ^p است.

۲. برای هر $s \in \mathbb{R}$ و $1 \leq p \leq \infty$، ثابت کنید $||(a_n)||_{s,p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^s |a_n|^p\right)^{1/p}$ یک نرم روی $W^{s,p}$ است.

۳. اگر $1 \leq p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، نشان دهید فضای دوگان $W^{s,p}$ به صورت ایزومتری یکریخت است با $W^{-s,q}$.

سؤال چهارم: به یکی از سه سؤال زیر پاسخ دهید.

۱. X فضای نرم‌دار است و $x_0 \neq 0$ داخل X مفروض است. نشان دهید تابعک خطی کران‌دار f روی X وجود دارد که

$$||f||_{X'} = ||x_0||_X^{-1}, \quad f(x_0) = 1$$

۲. اگر Z زیرفضای فضای برداری X باشد و $x_\circ \in X\backslash Z$ که $\operatorname{dist}(x_\circ, Z) > \circ$ ، نشان دهید $f \in X'$ وجود دارد که تحدید f روی Z صفر باشد و $||f||_{X'} = ۱$ و $f(x_\circ) = \operatorname{dist}(x_\circ, Z)$.

۳. اگر Z زیرفضای فضای برداری X باشد و $f \in Z'$، آنگاه توسعه آن به $\tilde{f} \in X'$ وجود دارد که

$$\tilde{f}|_Z = f, \quad \|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Z'}$$

سؤال پنجم: به یکی از چهار سؤال زیر پاسخ دهید.

۱. ثابت کنید زیرفضای Y از فضای هیلبرت H بسته است اگر و فقط اگر $Y = Y^{\perp\perp}$.

۲. اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد و $A \subset X$ یک زیرمجموعه ناتهی باشد. ثابت کنید: $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$

۳. برای فضای هیلبرت H و عملگر خطی $T \in L(H)$ ثابت کنید:

$$null\; T^* = (T(H))^{\perp}$$

۴. برای فضای هیلبرت H و عملگر خطی $T \in L(H)$ ثابت کنید:

$$null\; T = (T^*(H))^{\perp}$$

سؤال ششم: الف_ ثابت کنید دو نرم زیر روی فضای برداری توابع پیوسته $C[\circ, ۱]$ هم‌ارز نیستند.

$$\|f\|_\infty = \max_{\circ \le t \le ۱} |f(t)|, \qquad \|f\|_۲ = \left(\int_\circ^۱ |f(t)|^۲\, dt\right)^{۱/۲}$$

ب_ ثابت کنید اگر M یک زیرفضای $C[\circ, ۱]$ باشد که این دو نرم روی آن هم‌ارز باشد، آنگاه بعد M متناهی است.

موفق باشید.