باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ـ تمرین ۶ـ آذر ۹۹

۱. $T: l^2 \to l^2$ این گونه تعریف میشود که تصویر $x=(x_i)$ تحت عملگر T این گونه است که $y=Tx=(y_i)$ که $y_i=\alpha_i x_i$ که (α_i) مجموعه ای چگال در $[0,1]$ است. $\sigma_p(T), \sigma(T)$ را بیابید.

۲. X یک فضال باناخ است و $T: X \to X$. نشان دهید:

آ. برای هر $|\lambda| > ||T||$ ثابت کنید $||I+\lambda(T-\lambda I)^{-1}|| \leq \frac{||T||}{|\lambda|-||T||}$.

ب. برای هر $\lambda \in \rho(T)$ ثابت کنید $(T-\lambda I)^{-1}T = T(T-\lambda I)^{-1}$ و در نتیجه $dist(\lambda, \sigma(T)) \geq \frac{1}{||(T-\lambda I)^{-1}||}$.

ج. اگر $0 \in \rho(T)$ آنگاه $\sigma(T^{-1}) = \frac{1}{\sigma(T)}$ و اگر $1 \in \rho(T)$ تعریف میکنیم:

$$U=(T+I)(T-I)^{-1}=(T-I)^{-1}(T+I)$$

د. نشان دهید $1 \in \rho(U)$ و $(U-I)^{-1}$ را بر حسب T بنویسید.

ه. نشان دهید $T=(U+I)(U-I)^{-1}$ و $\sigma(U)=\frac{\sigma(T)+1}{\sigma(T)-1}$.

۳. $S, T \in B(X,X)$ نشان دهید برای هر $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$ داریم: $R_\lambda(S)-R_\lambda(T)=R_\lambda(S)(T-S)R_\lambda(T)$.

۴. X یک فضای هیلبرت است و $T: X \to X$ عملگر خطی خودالحاق است.

$$m=inf_{u\in X, |u|=1} < Tu, u > ,\ M=sup_{u\in X, |u|=1} < Tu, u >$$

ثابت کنید $\sigma(T) \subset [m, M]$ و $m, M \in \sigma(T)$ و $||T||=max\{|m|, |M|\}$.

۵. X یک فضای نرم دار است. ثابت کنید برای هر $f \in X'$ و $v \in X$ عملگر $T: X \to X$ که $T(x)=f(x)v$ یک عملگر فشرده است.

۶. X یک فضای ضرب داخلی است و y و z دو عضو از X هستند. نشان دهید عملگر $T: X \to X$ که $T(x)=< x, y > z$ فشرده است.

۷. $T: l^2 \to l^2$ که این عملگر $x=(x_i)$ را به $y=(y_i)$ میبرد که:

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j,\ \ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$$

آ. نشان دهید که T فشرده است.

ب. نشان دهید فضای همه ی این عملگر ها، یک زیرفضای $B(l^2, l^2)$ است.

ج. با ذکر مثال نشان دهید که هر عملگر فشرده، به این فرم نیست.

۸. X یک فضای هیلبرت است و $T: X \to X$ یک عملگر خطی کران دار است. نشان دهید:

آ. T فشرده است اگر و فقط اگر TT^* فشرده باشد.

ب. اگر T فشرده باشد، T^* فشرده است.

۹. $T: X \to X$ عملگر خطی فشرده روی فضای نرم دار X است. نشان دهید $0 \in \sigma(T)$.

۱۰. $T: X \to Y$ یک عملگر خطی روی فضای نرم دار X است که بعد $T(X)$ متناهی است. نشان دهید که T را می توان به فرم $Tx=\sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ نوشت که $\{y_1, ..., y_n\}$ و $\{f_1, ..., f_n\}$ دو مجموعه مستقل خطی به ترتیب در Y و X' است.

۱۱. X, Y دو فضای باناخ هستند که بعد X نامتناهی است و $T \in K(X,Y)$. نشان دهید که دنباله (u_n) در X پیدا میشود که

$$||u_n||_X = 1, ||Tu_n||_Y \to 0$$

۱۲. X, Y دو فضای باناخ هستند. با نرم های $||.||_X, ||.||_Y$.

آ. اگر X بازتابی باشد، برای هر $T \in K(X,Y)$ و هر نرم $||.||^*$ روی فضای X که برای هر $u \in X$ داریم $||u||^* \le C||u||_X$ ، آنگاه:

$$\forall \epsilon < 0 \; \exists C_\epsilon \ge 0 \; : \; ||Tu||_Y \le \epsilon ||u||_X + C_\epsilon ||u||^*$$

ب. نشان دهید که اگر X بازتابی نباشد، حکم بالا لزوما درست نیست.(راهنمایی: بگیرید $X = C[0,1]$ و $Y = \mathbb{R}$ و از نرم های L^p استفاده کنید.)

۱۳. فرض کنید H فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است و $\{e_n\}$ و $\{f_n\}$ دنباله های متعامد یکه در H باشند. $\{\alpha_n\}$ را دنباله ای در $\mathbb{C}$ بگیرید و عملگر خطی $T : H \to H$ را به این صورت تعریف میکنیم:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) f_n$$

. نشان دهید:

آ. T کراندار است اگر و تنها اگر دنباله $\{\alpha_n\}$ کراندار باشد.

ب. T فشرده است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

۱۴. اگر H فضای هیلبرت با بعد نامتناهی باشد و λ_n دنباله ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد که به صفر همگرا است، نشان دهید یک عملگر خودالحاق و فشرده روی H وجود دارد که مجموعه مقادیر ویژه ناصفر آن دنباله λ_n است.

۱۵. فرض کنید c_0 فضای دنباله های حقیقی همگرا به صفر باشد با نرم سوپریمم. ثابت کنید نشاندن $l^p \hookrightarrow c_0$ برای $1 \le p < \infty$ فشرده نیست. یک نرم برای فضای c_0 مثال بزنید که این نشاندن فشرده شود.

۱۶. نشان دهید برای هر عملگر تصویری $P \in B(H)$ داریم $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$.

۱۷. اگر $TS = ST$ ثابت کنید که $r_\sigma(ST) \le r_\sigma(S) r_\sigma(T)$. به علاوه نشان دهید شرط جابجایی S و T الزامی است.

۱۸. اگر $S \in B(H)$ خودالحاق باشد و $\sigma(S) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ ، نشان دهید که عملگرهای تصویری $P_1, ..., P_n \in B(H)$ وجود دارند که $P_j P_k = 0$ برای $j \ne k$ و $\sum_{j=1}^n P_j = I$ به علاوه $S = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$.

توجه : قبل از حل دو سوال بعدی، بخش های 7.2 و 7.3 کتاب را مطالعه کنید.

۱۹. T یک عملگر خطی کران دار است و S یک توسیع خطی T. حکم های زیر را ثابت کنید:

آ. $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(S)$

ب. $\sigma_r(S) \subset \sigma_r(T)$

ج. $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(S) \cup \sigma_p(S)$

۲۰. $X = C[0,1]$ و عملگر خطی $T : \mathscr{D}(X) \to X$ هر تابع x را به x'' میبرد. نشان دهید که $\sigma(X)$ فشرده نیست.

$$\mathscr{D}(X) = \{x \in X \mid x', x'' \in X, \; x(0) = x(1) = 0\}$$