باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ـ تمرین ۵ـ آذر ۹۹

۱. با توجه به تعریف فضای عمود که در تمرین ۱۲ سری سوم داده شده گزاره زیر را ثابت کنید.
فضاهای باناخ X و Y و عملگر کران‌دار $T : X \to Y$ مفروضند. اگر $T^{\times}$ عملگر الحاقی باشد نشان دهید

$$\overline{Im(T)}^{\perp} = \ker(T^{\times}), \quad Im(T) \subset \ker(T^{\times})^{\perp}$$

۲. اگر Y_1, Y_2 دو زیرفضای بسته و متمایز از فضای نرم‌دار X باشند آن‌گاه نشان دهید $Y_1^{\perp}$ و $Y_2^{\perp}$ متمایز هستند.

۳. عملگر $S : l^2 \to l^2$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \longmapsto (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \cdots)$$

عملگر T_n را از روی S می‌سازیم که $T_n = S^n$. مقادیر زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n x||, \ ||T_n||, \ \lim_{n\to\infty} ||T_n||$$

۴. X یک فضای باناخ است و Y یک فضای نرم‌دار و دنباله توابع $T_n \in B(X,Y)$ مفروضند که $\sup_n ||T_n|| = \infty$. نشان دهید $x_0 \in X$ وجود دارد که $\sup_n ||T_n x_0|| = \infty$.

۵. دنباله (x_n) در فضای باناخ X مفروض است به طوری که برای هر $f \in X'$ دنباله $(f(x_n))$ کران‌دار است. نشان دهید $(||x_n||)$ نیز کران‌دار خواهد بود.

۶. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و S یک زیرفضای بسته از آن و P نیز نگاشت تصویر روی S باشد.

آ. نشان دهید $P = P^*$ و $P^2 = P$.

ب. نشان دهید اگر Q یک تابع کراندار باشد که $Q^2 = Q$ و $Q^* = Q$ آن‌گاه Q نگاشت تصویر زیرمجموعه بسته‌ای از H می‌باشد.

۷. $\{T_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ دنباله‌ای از اپراتورهای کران‌دار روی فضای هیلبرت H است که برای هر k، $||T_k|| \leq 1$ و هم‌چنین

$$\forall k \neq j : \ \ T_k T_j^* = T_k^* T_j = 0$$

تعریف می‌کنیم

$$S_N = \sum_{-N}^{N} T_k$$

نشان دهید برای هر $x \in H$ دنباله $S_N(x)$ همگرا است و اگر حد نهایی را $T(x)$ بنامیم نشان دهید $||T|| \leq 1$.

۸.

آ. نشان دهید M زیرمجموعه فضای متریک X هیچ‌جا چگال است اگر و تنها اگر $(\overline{M})^c$ داخل X چگال باشد.

ب. اگر M زیرمجموعه‌ای از فضای متریک کامل X باشد که از کتگوری اول است نشان دهید مکمل آن در کتگوری دوم قرار دارد.

ج. مجموعه عددهای گویا به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}$ در کدام کتگوری قرار دارد؟ به عنوان زیرفضایی از خودش چطور؟

د. زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ پیدا کنید که چگال باشد و از کتگوری اول باشد.

۹. دنباله ضعیفا کوشی در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ دنباله‌ای مانند (x_n) داخل فضای نرم‌دار X است که برای هر $f \in X'$ دنباله $(f(x_n))$ داخل $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ کوشی باشد.

آ. نشان دهید هر دنباله ضعیفا کوشی کران‌دار است.

ب. اگر A مجموعه‌ای داخل فضای نرم‌دار X باشد که هر زیرمجموعه غیرتهی از A شامل دنباله‌ای ضعیفا کوشی باشد نشان دهید A کران‌دار است.

ج. فضای نرم‌دار X را ضعیفا کامل می‌نامیم اگر هر دنباله ضعیفا کوشی آن داخل X ضعیفا همگرا شود. اگر X یک فضای بازتابی باشد نشان دهید X ضعیفا کامل خواهد بود.

۱۰. X فضای باناخ جدایی پذیر است و $M \subset X'$ نیز یک مجموعه کران‌دار می‌باشد. نشان دهید هر دنباله‌ای از اعضای M شامل یک زیردنباله است که به صورت ضعیف* به عضوی داخل X' همگرا می‌شود. (بدون استفاده از قضیه باناخ–الاقلو–بورباکی مساله را حل کنید)

۱۱. نشان دهید فضاهای l^∞, l^1 بازتابی نیستند.

۱۲. فضاهای باناخ X, Y مفروضند. نشان دهید دنباله $T_n \in B(X,Y)$ به طور عملگری قوی همگرا است اگر و تنها اگر

آ. دنباله $(||T_n||)$ کران‌دار است.

ب. برای هر x داخل یک زیرمجموعه چگال از X دنباله $(T_n x)$ در Y کوشی است.

۱۳. X باناخ است. نشان دهید دنباله (f_n) داخل X' همگرای ضعیف* است اگر و تنها اگر

آ. دنباله $(||f_n||)$ کران‌دار است.

ب. برای هر x داخل یک زیرمجموعه چگال از X دنباله $(f_n x)$ در Y کوشی است.

۱۴. (جمع‌پذیری C_k–چزارو): دنباله $(x_n)_0^\infty$ مفروض است. دنباله‌های $(y_n^j)_{n=0}^\infty$ را برای $j \geq 0$ به صورت زیر می‌سازیم.

$$\forall n \geq 0 : \ z_n^0 := x_n$$

$$\forall n \geq 0, j \geq 1 : \ z_n^j = z_0^{j-1} + z_1^{j-1} + \cdots + z_n^{j-1}$$

و

$$y_n^j := \frac{z_n^j}{\binom{n+j}{j}}$$

اگر برای عددی طبیعی مانند k دنباله (y_n^k) هم‌گرا شود به عددی مانند y می گوییم (x_n) دنباله‌ای C_k–جمع‌پذیر است و C_k–حد آن برابر است با عدد y.

آ. نشان دهید z_n^k ها به فرم زیر هستند

$$z_n^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+k-1-i}{k-1} x_i$$

ب. دنباله‌ای مثال بزنید که C_k–جمع‌پذیر باشد اما C_{k-1}–.جمع‌پذیر نباشد

ج. نشان دهید C_k–جمع‌پذیری در شرایط جمع‌پذیری منظم صدق می کند.