باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ــ تمرین ۴ــ آبان ۹۹

۱. (تساوی آپولونیوس)بدون استفاده از رابطه ی متوازی الاضلاع، نشان دهید رابطه ی زیر برای هر x, y, z در هر فضای ضرب داخلی برقرار است:

$$||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \frac{1}{2}(x+y)||^2$$

۲. $T : X \to X$ یک عملگر خطی کران دار است روی فضای ضرب داخلی مختلط X. نشان دهید اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $< Tx, x >= 0$ آنگاه $T = 0$.

۳. X یک فضای ضرب داخلی باشد و $A \subset B \subset X$ باشد که A ناتهی است. ثابت کنید:

آ. $A \subset A^{\perp\perp}$

ب. $B^{\perp} \subset A^{\perp}$

ج. $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$

۴. ثابت کنید زیرفضای Y از فضای هیلبرت X بسته است اگر و فقط اگر $Y = Y^{\perp\perp}$.

۵. $\{e_1, ..., e_n\}$ یک مجموعه متعامد در فضای ضرب داخلی X است. برای هر $x \in X$ و هر y به فرم $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n$ نشان دهید که کمترین مقدار $||x-y||$ زمانی است که برای هر $i = 1, ..., n$ داشته باشیم $y_i =< x, e_i >$.

۶. دو پایه $\{e_1, ...\}$ و $\{\tilde{e_1}, ...\}$ برای فضای هیلبرت X در نظر بگیرید. تعریف میکنیم که $M_1 = span(e_n), M_2 = span(\tilde{e_n})$. ثابت کنید که $\bar{M_1} = \bar{M_2}$ اگر و فقط اگر $\tilde{e_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$, $e_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \tilde{e_m}$ که $\alpha_{nm} =< e_n, \tilde{e_m} >$.

۷. اگر P_n, H_n به ترتیب چندجمله ای های هرمیتی و لژاندر باشند، نشان دهید:

آ. $\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) w^n$

ب. $e^{2wt-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} H_n(t) w^n$

۸. X فضای هیلبرت است و $T_n : X \to X$ دنباله ای از عملگرهای خطی نرمال هستند که $T_n \to T$. نشان دهید T نیز نرمال است.

۹. برای فضای برداری V و عملگر خطی $T \in L(V)$ ثابت کنید:

آ. $null\ T^* = (T(V))^{\perp}$

ب. $T^*(V) = (null\ T)^{\perp}$

۱۰. (تساوی پارسوال) برای هر تابع $f \in L^2[-\pi, \pi]$ ثابت کنید:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

که a_n ها ضرایب سری فوریه تابع f هستند.

۱۱. ثابت کنید:

آ. با زدن مثال نقض نشان دهید که هیچ کدام از دو رابطه ی $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ درست نیستند.

ب. اگر تابع f خارج یک مجموعه کران دار E در $\mathbb{R}^d$ برابر صفر باشد و $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ آنگاه $||f||_{L^1} \leq m(E)^{\frac{1}{2}} ||f||_{L^2}$ که $m(E)$ مساحت(اندازه) مجموعه E است.

ج. اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ تابعی کران دار با کران M باشد، آنگاه $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ و $||f||_{L^2} \leq M^{\frac{1}{2}} ||f||_{L^1}^{\frac{1}{2}}$.

۱۲. فرض کنید P_1, P_2 عملگر تصویر روی S_1, S_2 باشند. آنگاه:

آ. P_1P_2 عملگر تصویر است اگر و فقط اگر $P_1P_2 = P_2P_1$.

ب. اگر P_1P_2 عملگر تصویر باشد، آنگاه عملگر تصویر روی $S_1 \cap S_2$ است.

۱۳. فضای هیلبرت X و دنباله $\{f_n\} \in X$ را در نظر بگیرید که برای هر n داریم $||f_n|| = 1$. نشان دهید $f \in X$ و زیر دنباله $\{n_k\}$ از اعداد موجود است که برای هر $g \in X$ داشته باشیم:

$$\lim_{k\to\infty} < f_{n_k}, g > = < f, g >$$

(به این نوع از همگرایی، همگرایی ضعیف گوییم.)

۱۴. $\{u_n\}$ یک دنباله در فضای هیلبرت X است که به طور ضعیف به 0 همگراست. با استفاده از استقرا، دنباله ی u_{n_j} بسازید که $u_{n_1} = u_1$ و برای هر $k \geq 2\ ,\ j = 1, 2, ..., k-1$ داشته باشیم:

$$| < u_{n_j}, u_{n_k} > | \leq \frac{1}{k}$$

نشان دهید دنباله $\sigma_p = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} u_{n_j}$ به طور قوی به 0 همگراست.(راهنمایی: مقدار $|\sigma_p|^2$ را تقریب بزنید.)

۱۵. فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله ای کران دار در فضای هیلبرت X باشد. ثابت کنید زیردنباله $\{u_{n_j}\}$ موجود است که دنباله $\sigma_p = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} u_{n_j}$ به طور قوی همگراست.

۱۶. فضای هیلبرت $X = L^2[-\pi, \pi]$ را در نظر بگیرید.که $[-\pi, \pi]$ را به صورت دایره در نظر بگیرد. یعنی توابعی در فضای X مدنظر ماست که در دو سر بازه، مقدار مساوی داشته باشد. T را یک عملگر فوریه چندگانه میگوییم اگر یک دنباله از اعداد مختلط $\{\lambda_n\}$ وجود داشته باشد که T هر تابع

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

را به

$$Tf(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n e^{inx}$$

ببرد.

آ. ثابت کنید عملگر T یک عملگر کران دار روی X است و $||T|| = \sup_n |\lambda_n|$.

ب. برای هر h عملگر τ_h را اینگونه تعریف میکنیم که $\tau_h(x) = f(x-h)$. نشان دهید که $T \circ \tau_h = \tau_h \circ T$.

ج. ثابت کنید اگر S یک عملگر کران دار روی X باشد که برای هر h داشته باشیم $S \circ \tau_h = \tau_h \circ S$ آنگاه S به فرم یک عملگر فوریه چندگانه است.(راهنمایی: از $S(e^{inx})$ استفاده کنید.)

۱۷. ثابت کنید روی هر فضای با بعد نامتناهی، یک عملگر خطی موجود است که کران دار نیست.(راهنمایی: از وجود پایه برای هر فضای برداری استفاده کنید.)