باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ــ تمرین ۳ــ آبان ۹۹

۱. برای تابعک زیرخطی p که روی فضای نرم‌دار X تعریف شده نشان دهید مجموعه زیر محدب است.

$$M = \{x \big| p(x) \leq \gamma, \gamma \neq 0\}$$

۲. X فضای نرم‌دار است و می‌دانیم برای هر تابعک خطی کراندار روی این فضا $f(x) = f(y)$. نشان دهید $x = y$.

۳. X فضای نرم‌دار است و $x_0 \neq 0$ داخل X مفروض است. نشان دهید تابعک خطی کران‌دار f^* روی X وجود دارد که

$$||f^*|| = ||x_0||^{-1}, \quad f^*(x_0) = 1$$

۴. ابرصفحه آفین H روی فضای نرم‌دار X عبارت است از

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

که در این‌جا f تابعک خطی غیر صفر است و α عددی ثابت است. هم‌چنین H را به صورت $H = [f = \alpha]$ می نویسیم. نشان دهید ابرصفحه $H = [f = \alpha]$ بسته است اگر و تنها اگر f پیوسته باشد.

۵. اگر A, B دو زیرمجموعه از X باشند، می‌گوییم ابرصفحه $H = [f = \alpha]$ جداکننده A, B است اگر

$$f(x) \leq \alpha \ : \ \forall x \in A, \ f(x) \geq \alpha \ : \ \forall x \in B$$

هم‌چنین می‌گوییم ابرصفحه $H = [f = \alpha]$ مجموعه‌های A, B را اکیدا جدا می‌کند اگر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد که

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \ : \ \forall x \in A, \ f(x) \geq \alpha + \epsilon \ : \ \forall x \in B$$

آ. برای مجموعه محدب و باز $C \subset X$ که شامل مبدا می‌باشد به ازای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم

$$p(x) := \inf\{\alpha > 0 \big| \ \alpha^{-1}x \in C\}$$

نشان دهید $p(x)$ تابعک زیرخطی است و هم‌چنین نشان دهید عدد ثابت M وجود دارد که $0 \leq p(x) \leq M||x||$ و نشان دهید

$$C = \{x \in X \big| \ p(x) < 1\}$$

ب. اگر $C \subset X$ مجموعه ناتهی محدب و باز باشد و $x_0 \in X$ عضوی خارج از C باشد نشان دهید ابرصفحه بسته‌ای وجود دارد که x_0 و C را جدا می‌کند.

ج. اگر $A, B \subset X$ دو مجموعه ناتهی و محدب باشند که $A \cap B = \emptyset$ و یکی از آن‌ها مجموعه باز باشد، آن‌گاه ثابت کنید ابرصفحه بسته H وجود دارد که A, B را جدا می‌کند.

۶. در سوال قبلی نشان دهید اگر یکی از A, B فشرده و دیگری بسته باشد، آن‌گاه ابرصفحه H وجود دارد که A, B را اکیدا جدا می‌کند.

۷. اگر E فضای برداری نرم‌دار با بعد متناهی باشد و A, B زیرمجموعه‌های محدب و ناتهی از E باشند، نشان دهید ابرصفحه H وجود دارد که A, B را جدا می‌کند.

۸. اگر Z زیرفضای فضای برداری X باشد و $x_0 \in X \backslash Z$ که $\mathrm{dist}(x_0, Z) > 0$ ، نشان دهید $f \in X'$ وجود دارد که تحدید f روی Z صفر باشد و $||f||_{X'} = 1$ و $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, Z)$

۹. عدد طبیعی $n > 1$ و فضای برداری نرم‌دار X مفروض‌اند. تابعک‌های خطی $f_1, f_2, \cdots, f_n$ روی این فضا مفروض‌اند. هم‌چنین عددهای $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ داده شده‌اند. نشان دهید گزاره‌های زیر معادل هستند.

آ. $x_0 \in X$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $f_i(x_0) = \alpha_i$

ب. برای عددهای حقیقی $\beta_1, \cdots, \beta_n$ که $\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j = 0$ آنگاه $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j = 0$.

۱۰. فرض کنید $X = \mathbb{R}^n$ و تعریف کنید

$$P = \{x \in X;\ x_i \geq 0\ \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$$

می‌دانیم M یک زیرفضای خطی از از X است به طوری که $M \cap P = \{0\}$. نشان دهید ابرصحفه H در X وجود دارد که شامل M است و $H \cap P = \{0\}$.

۱۱. فضای برداری نرم دار E مفروض است و $C \subset E$ مجموعه‌ای محدب و شامل مبدا می‌باشد. تعریف می‌کنیم

$$C^* = \{f \in E' \big|\ < f, x > \leq 1\ \ \forall x \in C\}$$

$$C^{**} = \{x \in E \big|\ < f, x > \leq 1\ \ \forall f \in C^*\}$$

ثابت کنید

$$C^{**} = \overline{C}$$

۱۲. اگر A زیرمجموعه فضای برداری نرم‌دار X باشد، آنگاه زیرفضای $A^{\perp} \subset X'$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$A^{\perp} = \{f \in X';\ \ < f, x >= 0\ \forall x \in A\}$$

اگر $E \subset X'$ باشد نیز زیرفضای $E^{\perp} \subset X$ را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E^{\perp} = \{x \in X;\ \ < f, x >= 0\ \forall f \in E\}$$

آ. نشان دهید برای هر $A \subset X$

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\text{Span}A}$$

ب. $N \subset X'$ زیرفضای خطی می‌باشد. نشان دهید

$$N \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$$

ج. فرض کنید $E = l^1$ و $E' = l^{\infty}$ و $N = \{(x_k) \big| \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$ به عنوان زیرفضای بسته از E'. نشان دهید

$$N \neq (N^{\perp})^{\perp}$$

۱۳. فرض کنید E فضای برداری نرم دار باشد و $f \in E'$ که $f \neq 0$. همچنین $M = [f = 0]$ ابرصفحه است.

آ. $M^{\perp}$ را پیدا کنید.

ب. برای هر $x \in E$ نشان دهید

$$\text{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} ||x - y|| = \frac{| < f, x > |}{||f||}$$

ج. فرض کنید $E = \{u \in C([0, 1]; \mathbb{R});\ u(0) = 0\}$ و همچنین

$$< f, u >= \int_0^1 u(t)dt, \quad u \in E$$

ثابت کنید $\text{dist}(u, M) = |\int_0^1 u(t)dt|$ و همچنین نشان دهید $\inf_{v \in M} ||u - v||$ هیچگاه اخذ نمی‌شود برای $u \in E \backslash M$.

۱۴. فرض کنید F تابعی باشد که روی بازه $[a, b]$ تعریف شده است.

آ. تغییرات مثبت تابع F را تعریف می‌کنیم برابر با

$$P_F(a,x) = \sup \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1})$$

که سوپریمم روی همه افرازهای بازه $[a,x]$ تعریف شده و مجموع نیز روی همه اندیس‌هایی که $F(t_j) \geq F(t_{j-1})$. به طور مشابه تغییرات منفی را می‌توانیم تعریف کنیم

$$N_F(a,x) = \sup \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})]$$

که سوپریمم روی همه افرازهای بازه $[a,x]$ تعریف شده و مجموع نیز روی همه اندیس‌هایی که $F(t_j) \leq F(t_{j-1})$. در نهایت تغییرات تابع F را تعریف می‌کنیم برابر با

$$T_F(a,x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|$$

که سوپریمم روی همه افرازهای بازه $[a,x]$ تعریف شده است.

اگر F تابعی با تغییرات کران‌دار باشد ثابت کنید

$$F(x) - F(a) = P_F(a,x) - N_F(a,x), \quad T_F(a,x) = P_F(a,x) + N_F(a,x)$$

ب. ثابت کنید تابع حقیقی مقدار F روی $[a,b]$ یک تابع با تغییرات کران‌دار است اگر و تنها اگر F را بتوان به صورت تفاضل دو تابع یکنوا و کران‌دار نوشت.