باسمه تعالی

آنالیز تابعی مقدماتی ــ تمرین ۲ ــ مهر ۹۹

۱. نشان دهید هر مجموعه باز و محدب و کران دار $\mathbb{R}^n$ که نسبت به مبدا متقارن است، گوی واحد یک نرم است.

۲. برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نشان دهید که $||x||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||x||_p$

۳. $S, T \in L(X)$ و $ST = I_X$ که I_X عملگر همانی فضای X است.

آ. ثابت کنید اگر $dimX < \infty$ آنگاه $TS = I_X$

ب. مثالی ارایه دهید که X بعد نامتناهی باشد و رابطه ی $TS = I_X$ برقرار نباشد.

۴. $T : C[0,1] \to C[0,1]$ که تابع $x(t)$ را به تابع $y(s)$ تبدیل میکند که $y(s) = \int_0^s x(t)dt$.

آ. $R(T)$ (تصویر فضای $C[0,1]$ تحت T) را بیابید.

ب. آیا $T^{-1} : R(T) \to C[0,1]$ خطی و کران دار است؟

۵. $T \in L(V)$ و $dimV < \infty$. ثابت کنید که T عملگر یکانی است اگر و فقط اگر T هر پایه متعامد یکه را به پایه ای متعامد یکه ببرد.

۶. Y یک زیرفضای فضای X است. برای هر $x \in X$ ، هم دسته x را این گونه تعریف میکنیم که

$$x + Y = \{v | \exists y :\ x + y = v\}$$

آ. نشان دهید که هم دسته ها، X را افراز میکنند.

ب. فضای هم دسته ها را با X/Y نشان می دهند. ثابت کنید که X/Y فضای خطی است. به این فضا، فضای خارج قسمت گویند.

۷. Y یک زیرفضای بسته فضای نرم دار X است. نشان دهید که $||.||_0$ یک نرم روی فضای x/Y است.

$$\forall \hat{x} \in X/Y :\ ||\hat{x}||_0 := \inf_{x\in\hat{x}} ||x||$$

۸. $T : X \to Y$ مثال بزنید که خطی و کران دار باشد ولی $T^{-1} : R(T) \to X$ کران دار نباشد.

۹. A یک ماتریس $m \times n$ است. تعریف می کنیم که

$$||A||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}\ ,\ ||A||_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1}$$

آ. نشان دهید که

$$||A||_\infty = \max_j \sum_{k=1}^{n} |A_{jk}|$$

ب. نشان دهید که

$$||A||_1 = \max_k \sum_{j=1}^{m} |A_{jk}|$$

۱۰. عملگر خطی $T : X \to Y$ مثال بزنید که $ker(T)$ بسته نباشد.

۱۱. X را بگیرید فضای همه دنباله هایی در l^{∞} که همگرا به صفر هستند. ثابت کنید که X' به طور ایزومتر با l^1 یکریخت است.

۱۲. (قضیه نقطه ثابت باناخ)فضای متریک ناتهی و تام (X, d) را در نظر بگیرید و عملگر خطی $T : X \to X$ انقباضی باشد. به این معنی که عدد ثابت $0 < c < 1$ موجود باشد که

$$\forall x, y \in X \ : \ d(T(x), T(y) \leq cd(x, y)$$

ثابت کنید X یک نقطه ثابت یکتا دارد. (یعنی $\tilde{x} \in X \ s.t \ T(\tilde{x}) = \tilde{x}$)

۱۳. X, Y فضاهای خطی نرم دار هستند و $T_n : X \to Y$ دنباله ای از عملگرهای کراندار هستند که به مفهوم عملگری به عملگر T همگرا هستند. ثابت کنید برای هر گوی بسته B :

$$\forall \, \epsilon > 0 \, , \, \exists \, N \in \mathbb{N} \, s.t. \, \forall \, n > N \, , \, x \in B : \, ||T_n(x) - T(x)|| < \epsilon$$

۱۴. f تابعک خطی کران دار ناصفر روی فضای برداری X با میدان $\mathbb{R}$ است. برای هر $c \in \mathbb{R}$ تعریف میکنیم که:

$$X_c = \{x | f(x) \leq c\}$$

آ. ثابت کنید اگر $c = ||f||$ آنگاه گوی بسته واحد درون X_c است.

ب. ثابت کنید به ازای هر $\epsilon > 0$ ، گوی بسته واحد درون X_c نیست. که در اینجا $c = ||f|| - \epsilon$.